Chapitre 6

Dérivation I

Chapitre 6
1STMG.140 Calculer un taux de variation et un nombre dérivé.
1STMG.141 Lire graphiquement un nombre dérivé.
1STMG.142 Construire la tangente à une courbe en un point.

I. Taux de variation et sécante à une courbe

1. Taux de variation

Définition

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et a un réel appartenant à I.
Soit h un réel non nul tel que $a+h \in \mathrm{I}$.

Le taux de variation de f entre a et $a+h$ est le rapport (quotient) $t(h)$ défini par :

$$t(h) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

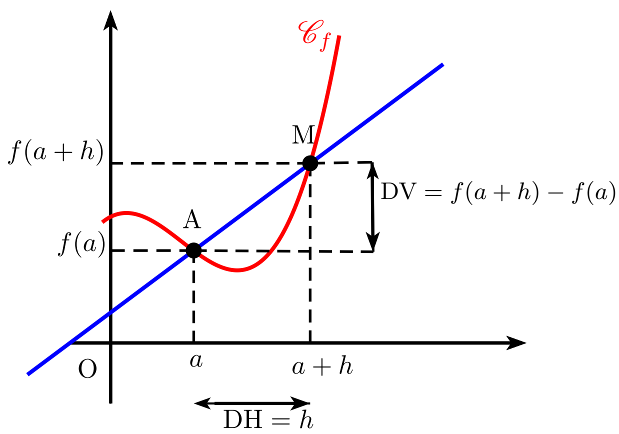
2. Interprétation graphique

Définition

On considère deux points A et M d'une courbe $\mathscr{C}_f$ d'abscisses respectives a et $a+h$.
La droite (AM) est appelée sécante à la courbe $\mathscr{C}_f$.

Le taux de variation de f entre a et $a+h$ est le coefficient directeur de la sécante (AM) :

$$\frac{\mathrm{DV}}{\mathrm{DH}} = \frac{y_{\mathrm{M}} - y_{\mathrm{A}}}{x_{\mathrm{M}} - x_{\mathrm{A}}} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$



1STMG.140 **Exemple :** Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - 3$.

Calculer le taux de variation de f entre 2 et $2+h$.

....

....

....

....

....

II. Nombre dérivé et tangente à une courbe

1. Nombre dérivé

Définition

On dit que f est **dérivable** en a lorsque le taux de variation $t(h)$ admet comme limite un nombre réel quand h tend vers 0.
Ce nombre, noté $f'(a)$ est appelé **nombre dérivé de f** en a.
On a ainsi :

$$\lim_{h\to 0} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Commentaire

$\lim_{h\to 0} t(h)\ell$ se lit « limite quand h tend vers 0 de $t(h)$ égale ℓ.
Cela signifie que lorsque le nombre h devient très proche de 0, le nombre $t(h)$ prend des valeurs très voisines de ℓ (aussi proche que l'on veut).

1STMG.140 Dans l'exemple précédent, lorsque h prend des valeurs de plus en plus proches de 0, le nombre $4+h$ devient très proche de .... Ainsi :

$$\lim_{h\to 0} 4+h\ldots\ldots\ldots$$

La fonction f est donc dérivable en 2 et $f'(2) = \ldots\ldots\ldots\ldots$

1STMG.140 **Exercice :**

a. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = -x^2 + x$. Montrer que g est dérivable en 2 et calculer $g'(2)$.

....

....

....

....

....

....

....

....

b. Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $h(x) = 2x^2 - x + 1$. Montrer que h est dérivable en 1 et calculer $h'(1)$.

....

....

....

....

....

....

....

....

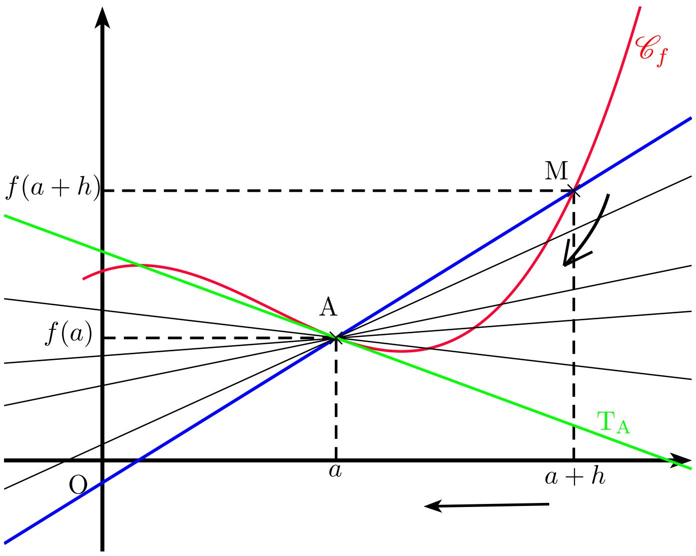
....

....

....

....

2. Tangente à une courbe



Le fait que h tende vers 0 se traduit graphiquement par le fait que le point M se rapproche du point A.
Ainsi, les sécantes (AM) tendent vers une position limite : celle de la droite T_A passant par A et de coefficient directeur $f'(a)$.

Cette droite semble presque confondue avec la courbe $\mathscr{C}_f$ au voisinage de A.

Définition

Soit f une fonction dérivable en a, $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative et A le point de $\mathscr{C}_f$ d'abscisse a.

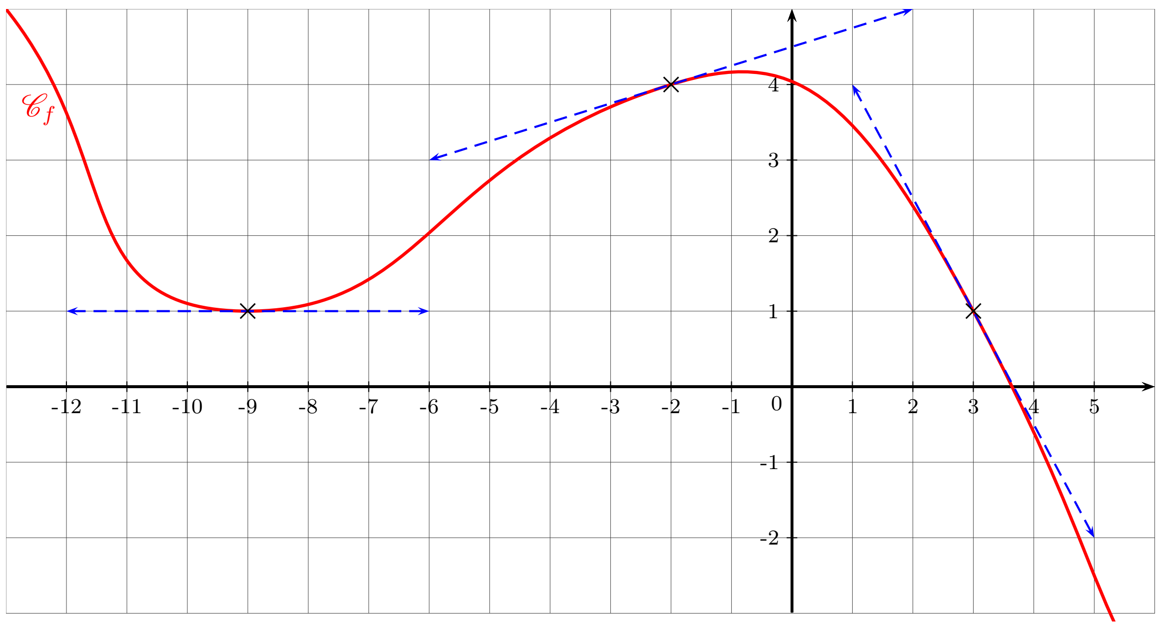
La tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point A est ....

....

Commentaire

Aux alentours du point A, la tangente est la droite la plus proche de la courbe $\mathscr{C}_f$.

1STMG.141 **Exercice :** On donne sur la figure ci-dessous la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ d'une fonction définie f sur $\mathbb{R}$ ainsi que les tangentes à cette courbe en certains points.



1. Donner par lecture graphique $f(3)$, $f(-2)$ et $f(-9)$.

....

....

2. Donner par lecture graphique $f'(3)$, $f'(-2)$ et $f'(-9)$.

....

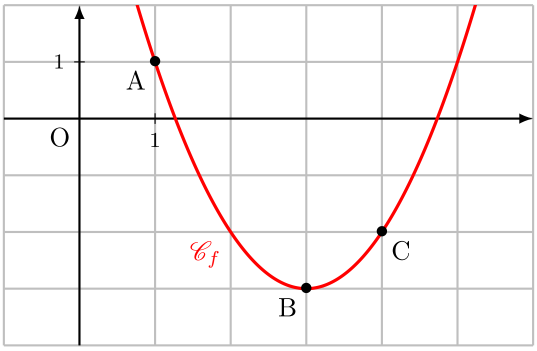
....

....

1STMG.142 **Exercice 1 :** Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$. f est dérivable en 1, en 3 et en 4 et telle que :

$$f'(1) = -4 \quad ; \quad f'(3) = 0 \quad ; \quad f'(-4) = 2$$

Construire les tangentes à la courbe $\mathscr{C}_f$ aux points A, B et C.



Explications : ....

....

....

....

....

....

....

1STMG.140 1STMG.141 1STMG.142 **Exercice 2 :**
Sur le graphique ci-dessous, $\mathscr{C}_f$ est la courbe représentative d'une fonction f et la droite T est la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point A d'abscisse 2. La fonction f est dérivable en 2 et en 3.

1. **a.** Déterminer, par lecture graphique, la valeur de $f'(2)$.
b. En déduire l'équation réduite de la tangente T.

Explications : ....

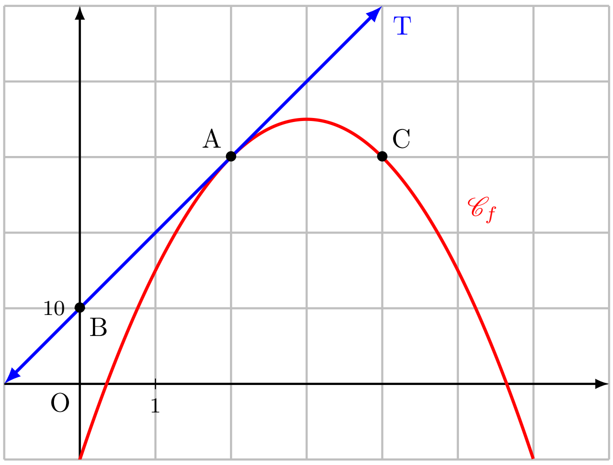
....

....

....

....

....



2. La fonction f a pour expression $f(x) = -5x^2 + 30x - 10$.
a. Montrer que la courbe $\mathscr{C}_f$ passe par le point C(4 ; 30).
b. Montrer, par le calcul, que $f'(4) = -10$.
c. En déduire l'équation réduite de la tangente au point C puis la tracer.

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....