Chapitre 7

Variables aléatoires

Chapitre 7
1STMG.240 Interpréter les évènements $\{X = a\}$ et $\{X < a\}$ et calculer leur probabilité.
1STMG.241 Déterminer la loi de probabilité d'une variable aléatoire.
1STMG.242 Calculer et interpréter l'espérance d'une variable aléatoire..

I. Variables aléatoires

1. Définition

Exemple d'introduction :
Une expérience aléatoire consiste à lancer un dé à six faces et regarder le résultat obtenu.
L'univers associé à cette expérience est l'ensemble de toutes les issues possibles : Ici $\Omega = \{1\,;\,2\,;\,3\,;\,4\ \ 5\,;\,6\}$

On considère le jeu suivant :
- Si le résultat est pair, on gagne 2 € ;
- Si le résultat est 1, on gagne 3 € ;
- Si le résultat est 3 ou 5, on perd 6 €.

On peut définir ainsi une variable aléatoire X sur Ω qui peut prendre les valeurs 2, 3 ou -6.
Pour les issues 2, 4 ou 6, on a : $X = 2$; pour l'issue 1, on a : $X = 3$ pour les issues 3 et 5, on a : $X = -6$.

Définition

Lorsqu'à chaque évènement élémentaire d'une expérience aléatoire, on associe un nombre réel, on dit que l'on définit une ....

II. Loi de probabilité d'une variable aléatoire

Soit X une variable aléatoire prenant les valeurs x_1, x_2, ..., x_n.
L'évènement « X prend la valeur x_i » est noté $(X = x_i)$ avec $1 \leqslant i \leqslant n$.

Définition

Lorsqu'à chaque valeur x_i (avec $1 \leqslant i \leqslant n$) prise par une variable aléatoire X, on associe la probabilité p_i de l'évènement $(X = x_i)$, on dit que l'on définit une ....
On présente généralement la loi de probabilité d'une variable aléatoire dans un tableau.

1STMG.240 1STMG.241 **En reprenant l'exemple d'introduction :**

La loi de probabilité de X est donnée par le tableau suivant :

x_i	...	...	...
$p(X = x_i)$	...	...	...

- $p(X = -6) =$........................ ;
- $p(X = 2) =$ .... ;
- $p(X = 3) =$ .... ;

Remarque : La somme de toutes les probabilités du tableau est égale à 1.

III. Espérance d'une variable aléatoire

Soit Ω l'univers correspondant à une expérience aléatoire et X une variable aléatoire définie sur Ω prenant n valeurs x_1, x_2, ..., x_n avec des des probabilités respectives p_1, p_2, ..., p_n.

Définition

.... de X est le nombre, noté $E(X)$, défini par :

$$E(X) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Remarque : L'espérance est la moyenne des valeurs x_i pondérées par les probabilités p_i.

1STMG.242 **En reprenant l'exemple d'introduction :**

a. Déterminer l'espérance de la variable aléatoire X.

b. Le jeu est-il équitable ?

....

....

....

....

....

Définition

Un jeu est équitable lorsque $E(X) = \ldots\ldots$

1STMG.240 1STMG.241 1STMG.242 **Exercice :**

On note X la variable aléatoire qui, à chaque jour, associe le nombre de véhicules neufs vendus par un concessionnaire. Sa loi de probabilité est donnée par le tableau suivant :

x_i	0	1	2	3
$p(X = x_i)$	0,45	0,3	0,15	......

1. **a.** Donner la probabilité $p(X = 1)$. Interpréter ce résultat.

b. Quelle est la probabilité que le concessionnaire vende trois véhicules dans la journée ?

2. Calculer $p(X \geqslant 1)$. Interpréter ce résultat.

3. Combien de véhicules par jour vend en moyenne le concessionnaire ?

....

....

....

....

....

....

....

....

....