Applications de la dérivation

www.mathGM.fr

Lycée Louise Michel (Gisors)

Les savoir-faire

230. Connaître le lien entre le signe de f' et le sens de variation de f.
231. Etudier les variations d'une fonction.
232. Utiliser les variations d'une fonction pour obtenir ses extrema, obtenir des inégalités, résoudre un problème d'optimisation,.....

Théorème

Théorème

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I.

- Si f est croissante sur I, alors pour tout réel x de I,

- Si f est décroissante sur I, alors pour tout réel x de I,

- Si f est constante sur I, alors pour tout réel x de I,

Théorème

Théorème

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I.

- Si f est croissante sur I, alors pour tout réel x de I,

$$f'(x) \geqslant 0$$

- Si f est décroissante sur I, alors pour tout réel x de I,

- Si f est constante sur I, alors pour tout réel x de I,

Théorème

Théorème

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I.

- Si f est croissante sur I, alors pour tout réel x de I,

$$f'(x) \geqslant 0$$

- Si f est décroissante sur I, alors pour tout réel x de I,

$$f'(x) \leqslant 0$$

- Si f est constante sur I, alors pour tout réel x de I,

Théorème

Théorème

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I.

- Si f est croissante sur I, alors pour tout réel x de I,

$$f'(x) \geqslant 0$$

- Si f est décroissante sur I, alors pour tout réel x de I,

$$f'(x) \leqslant 0$$

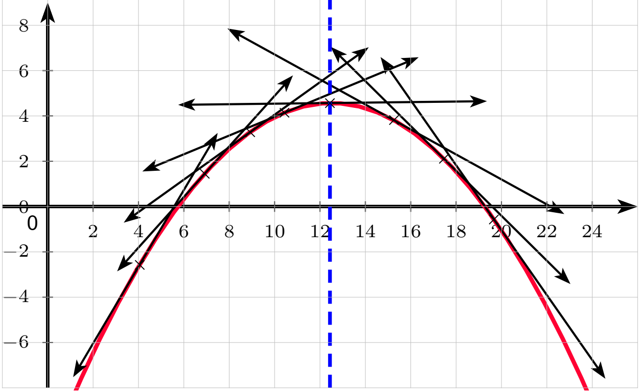
- Si f est constante sur I, alors pour tout réel x de I,

$$f'(x) = 0$$

Interprétation graphique

Si f est strictement croissante sur I, alors en chaque point de $\mathscr{C}$, le coefficient directeur de la tangente est positif, donc pour tout réel a de I, $f'(a) > 0$

Si f est strictement décroissante sur I, alors en chaque point de $\mathscr{C}$, le coefficient directeur de la tangente est négatif, donc pour tout réel a de I, $f'(a) < 0$



Théorème

Théorème

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I.

- Si pour tout réel x de I on a $f'(x) > 0$, alors
- Si pour tout réel x de I on a $f'(x) < 0$, alors
- Si pour tout réel x de I on a $f'(x) = 0$, alors

Théorème

Théorème

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I.

• Si pour tout réel x de I on a $f'(x) > 0$, alors f est strictement croissante sur I.

• Si pour tout réel x de I on a $f'(x) < 0$, alors

• Si pour tout réel x de I on a $f'(x) = 0$, alors

Théorème

Théorème

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I.
• Si pour tout réel x de I on a $f'(x) > 0$, alors f est strictement croissante sur I.
• Si pour tout réel x de I on a $f'(x) < 0$, alors f est strictement décroissante sur I.
• Si pour tout réel x de I on a $f'(x) = 0$, alors

Théorème

Théorème

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I.

• Si pour tout réel x de I on a $f'(x) > 0$, alors f est strictement croissante sur I.

• Si pour tout réel x de I on a $f'(x) < 0$, alors f est strictement décroissante sur I.

• Si pour tout réel x de I on a $f'(x) = 0$, alors f est constante sur I.

Théorème

Théorème

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I.

- Si pour tout réel x de I on a $f'(x) > 0$, alors f est strictement croissante sur I.
- Si pour tout réel x de I on a $f'(x) < 0$, alors f est strictement décroissante sur I.
- Si pour tout réel x de I on a $f'(x) = 0$, alors f est constante sur I.

Remarque

Pour étudier les variations d'une fonction, on étudie le signe de sa dérivée.

Exemple

Déterminer les variations de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$f(x) = x^3 + \frac{9}{2}x^2 - 12x + 5$. Vidéo

Minimium, maximum

Définition

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I et a un réel de I.

• On dit que le réel M est **le maximum de f sur I** atteint en a, si $f(a) = M$ et si pour tout réel x de I, on a $f(x) \leqslant M$.

• On dit que le réel m est **le minimum de f sur I** atteint en b, si $f(b) = m$ et si pour tout réel x de I, on a $f(x) \geqslant m$.

• Un **extremum de f sur I** est un maximum ou un minimum.

Minimium, maximum

Définition

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I et a un réel de I.
- On dit que le réel M est **le maximum de f sur I** atteint en a, si $f(a) = M$ et si pour tout réel x de I, on a $f(x) \leqslant M$.
- On dit que le réel m est **le minimum de f sur I** atteint en b, si $f(b) = m$ et si pour tout réel x de I, on a $f(x) \geqslant m$.
- Un **extremum de f sur I** est un maximum ou un minimum.

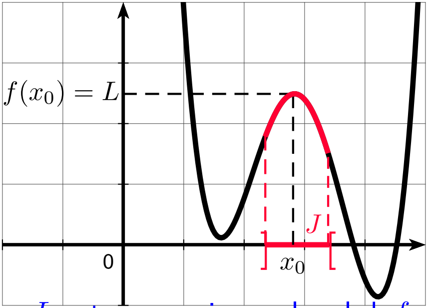
Exemple

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 5x^2 - 3x + 4$.
Déterminer l'extremum de la fonction f. Vidéo

Extremum local

Définition

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I et a un réel de I. Dire que L est un **maximum (respectivement minimum) local** de f sur I s'il existe un intervalle ouvert J contenu dans I, tel que L est le maximum (respectivement minimum) de f sur J.



L est un maximum local de f

Lien dérivée/Extremum local

Théorème

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I.
Si f admet un extremum local en $x_0 \in I$, alors on a

Lien dérivée/Extremum local

Théorème

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I.
Si f admet un extremum local en $x_0 \in I$, alors on a $f'(x_0) = 0$.

Lien dérivée/Extremum local

Théorème

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I.
Si f admet un extremum local en $x_0 \in I$, alors on a $f'(x_0) = 0$.

Remarque :
La réciproque de ce théorème est fausse.

Lien dérivée/Extremum local

Théorème

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I.
Si f admet un extremum local en $x_0 \in I$, alors on a $f'(x_0) = 0$.

Remarque :
La réciproque de ce théorème est fausse.

Théorème

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I.
Soit $x_0 \in I$.
Si **et si** , alors f admet un extremum local en x_0.

Lien dérivée/Extremum local

Théorème

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I.
Si f admet un extremum local en $x_0 \in I$, alors on a $f'(x_0) = 0$.

Remarque :
La réciproque de ce théorème est fausse.

Théorème

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I.
Soit $x_0 \in I$.
Si $f'(x_0) = 0$ **et si** f' change de signe en x_0, alors f admet un extremum local en x_0.