Chapitre 12

Fonction exponentielle

Les savoir-faire

240. Transformer une expression en utilisant les propriétés de la fonction exponentielle.
241. Résoudre des équations ou inéquations contenant des exponentielles.
242. Représenter graphiquement les fonctions $t \longmapsto \mathrm{e}^{-kt}$ et $t \longmapsto \mathrm{e}^{kt}$ $(k > 0)$
243. Modéliser une situation par une croissance, une décroissance exponentielle.

I. La fonction exponentielle

1. Définition et premières propriétés

Propriété

Soit f une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $f(0) = 1$ et $f' = f$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f(x) \times f(-x) = 1 \qquad \text{et} \qquad f(x) \neq 0$$

Théorème

Il existe une **unique** fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $f' = f$ et $f(0) = 1$.

Définition

La fonction exponentielle est la fonction notée exp définie sur $\mathbb{R}$ par : $\exp'(x) = \exp(x)$ et $\exp(0) = 1$.

2. Relation fonctionnelle

Premières propriétés

Pour tout $x \in \mathbb{R}$:
- $\exp(-x) = \dfrac{1}{\exp(x)}$.
- $\exp(x) > 0$.

Relations fonctionnelles

Pour tous réels x et y :
- $\exp(x+y) = \exp(x) \times \exp(y)$.
- $\exp(x-y) = \dfrac{\exp(x)}{\exp(y)}$.
- Pour tout $n \in \mathbb{Z}$: $\exp(nx) = (\exp(x))^n$.

3. Notation e

Définition

On note e l'image de 1 par la fonction exp. Ainsi, $\exp(1) = \mathrm{e}$.

Ce nombre est appelé constante de Neper ou nombre d'Euler.

Remarque :
Le nombre e est irrationnel et vaut approximativement $2,718$.

Notation

Pour tout $p \in \mathbb{Z}$, $\exp(p) = \exp(p \times 1) = (\exp(1)^p) = \mathrm{e}^p$.
En généralisant cette écriture :
Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\exp(x) = \mathrm{e}^x$.
Par exemple, la propriété $\exp(x+y)$ =$\exp(x)$×$\exp(y)$ s'écrit :

$$\mathrm{e}^{x+y} = \mathrm{e}^x \times \mathrm{e}^y$$

Exemple :
Simplifier les écritures suivantes :
$A = \dfrac{\mathrm{e}^4 \times \mathrm{e}^4}{\mathrm{e}^5}$ et $B = \left(\mathrm{e}^5\right)^{-6} \times \mathrm{e}^3$. Vidéo

II. Étude de la fonction exponentielle

1. Variations

Propriété

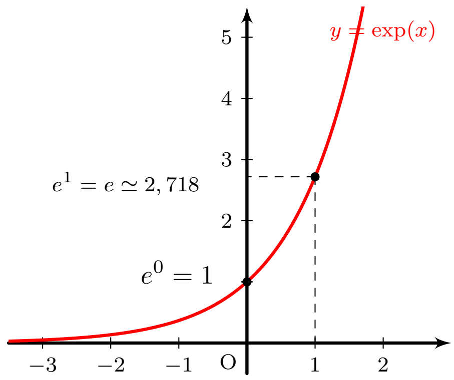
La fonction exp est dérivable sur $\mathbb{R}$ donc continue sur $\mathbb{R}$;
Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\exp'(x) = \exp(x) > 0$ donc la fonction exp est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Conséquences :
Pour tous réels a et b :

$$\mathrm{e}^a = \mathrm{e}^b \iff a = b \qquad ; \qquad \mathrm{e}^a < \mathrm{e}^b \iff a < b$$

2. Tableau de variations et courbe

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
exp'(x)		+		
exp(x)	0 ↗	1 ↗	e ↗	$+\infty$



Exemples :

1. Dériver les fonctions définies par :

a. $f(x) = 4x - 3e^x$ **b.** $g(x) = (x-1)e^x$ **3.** $h(x) = \dfrac{e^x}{x}$ Vidéo

2. **a.** Résoudre l'équation $e^{x^2-3} - e^{-2x} = 0$. Vidéo

b. Résoudre l'inéquation $e^{4x-1} \geqslant 1$. Vidéo

III. Compléments sur la fonction exponentielle

Dérivée de e^{ax+b}

Soit a et b deux réels fixés.
La fonction définie par $f(x) = e^{ax+b}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et admet pour dérivée :

$$f'(x) = ae^{ax+b}$$