Cours & méthodes

Variations et extremums

10 FONCTIONS

1 Variations d'une fonction

1.1 Fonction croissante

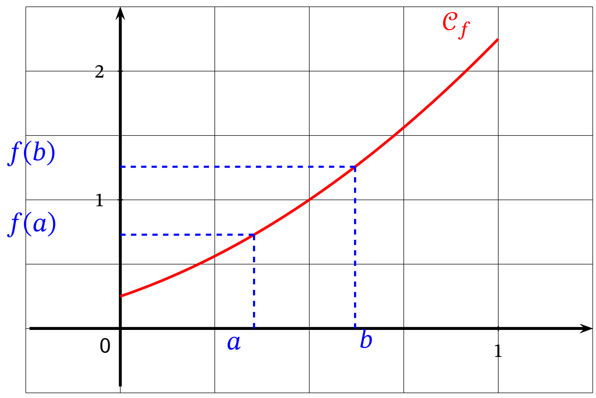
Définition : Fonction croissante

On dit qu'une fonction f est croissante sur un intervalle, si et seulement si, **pour tous** nombres réels a et b appartenant à cet intervalle on a :

$$\boxed{\text{Si } a < b \text{ alors } f(a) \leqslant f(b)}$$

Si on note $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f, $\mathcal{C}_f$ « monte ».

On dit qu'une fonction croissante **conserve l'ordre**, c'est-à-dire que les nombres et leurs images sont rangés dans le même ordre.



f est croissante sur $[0\ ;\ 1]$.

1.2 Fonction décroissante

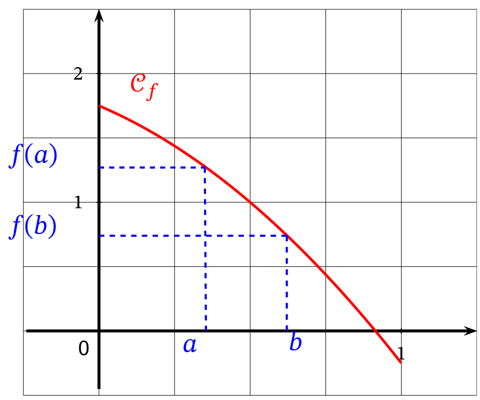
Définition : Fonction décroissante

On dit qu'une fonction f est décroissante sur un intervalle, si et seulement si, **pour tous** nombres réels a et b appartenant à cet intervalle on a :

$$\boxed{\text{Si } a < b \text{ alors } f(a) \geqslant f(b)}$$

Si on note $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f, $\mathcal{C}_f$ « descend ».

On dit qu'une fonction décroissante **change l'ordre**, c'est-à-dire que les nombres et leurs images sont rangés dans un ordre inverse.



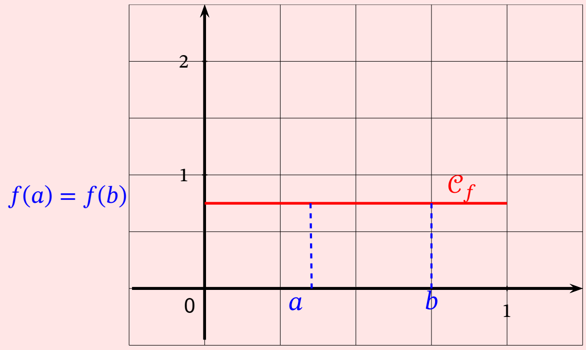
f est décroissante sur $[0\ ;\ 1]$.

1.3 Fonction constante

Définition : Fonction constante

On dit qu'une fonction f est constante sur un intervalle, si et seulement si, **pour tous** nombres réels a et b appartenant à cet intervalle on a :

$$\boxed{\text{Si } a < b \text{ alors } f(a) = f(b)}$$

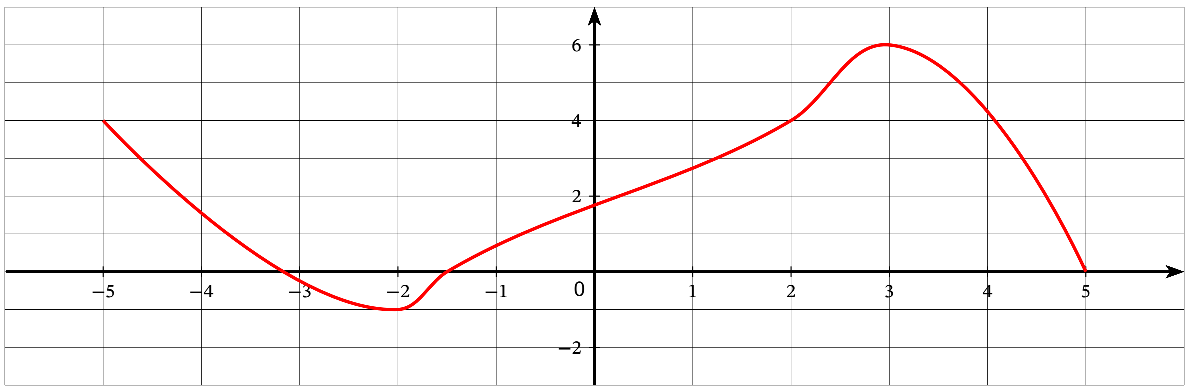


f est constante sur $[0\ ;\ 1]$

Remarque

- Si l'inégalité $a < b$ implique l'inégalité stricte $f(a) < f(b)$, on dit que la fonction f est **strictement croissante sur l'intervalle**.
- Si l'inégalité $a < b$ implique l'inégalité stricte $f(a) > f(b)$, on dit que la fonction f est **strictement décroissante sur l'intervalle**.
- On dit qu'une fonction f est **monotone** sur un intervalle si elle est soit croissante, soit décroissante sur cet intervalle.
- Un tableau de variation **est un tableau qui résume de façon schématique les variations de la fonction.**

1.4 Tableau de variations



antécédents

f est strictement décroissante sur l'intervalle $[-5\ ;\ -2]$

x	-5		-2		3		5
$f(x)$	4	↘	-1	↗	6	↘	0

images

f est strictement croissante sur l'intervalle $[-2\ ;\ 3]$

2 Variations de fonctions de référence

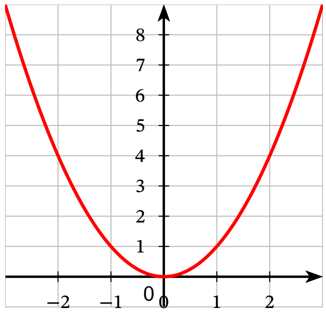
2.1 Les fonctions affines

Soit f une fonction affine définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = mx + p$.
- Si $m > 0$ alors f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
- Si $m < 0$ alors f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.
- Si $m = 0$ alors f est une fonction constante sur $\mathbb{R}$.

2.2 La fonction carré

Vidéo
- La fonction carré est croissante sur $[0\ ;\ +\infty[$;
- La fonction carré est décroissante sur sur $]-\infty\ ;\ 0]$.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
x^2	↘	0	↗



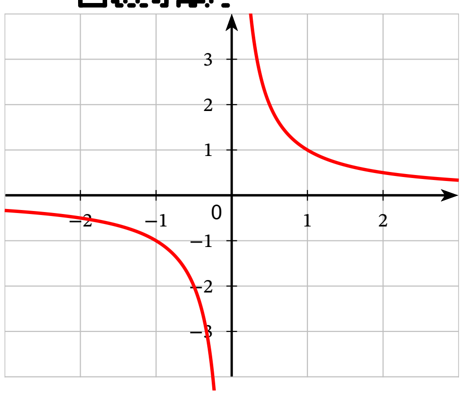
Méthode : Utiliser la fonction carré pour comparer

On a représenté graphiquement la fonction carré f dans un repère.
1. Comparer graphiquement $f(0,5)$ et $f(1,5)$. Même question avec $f(-1,5)$ et $f(-1)$.
2. Vérifier par calcul le résultat de la question **1.**

2.3 La fonction inverse

- La fonction inverse est strictement décroissante sur $]-\infty\ ;\ 0[$.
- La fonction inverse est strictement décroissante sur $]0\ ;\ +\infty[$.*

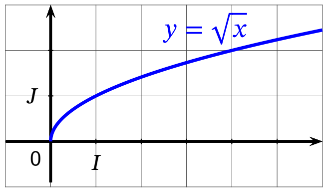
x	$-\infty$	0	$+\infty$
$\frac{1}{x}$	↘	‖	↘



2.4 La fonction racine carrée

La fonction racine carrée est strictement croissante sur $[0\ ;\ +\infty[$.

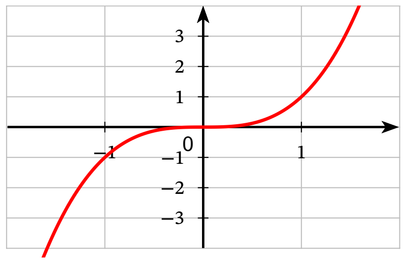
x	0 $+\infty$
$\sqrt{x}$	$0 \nearrow$



2.5 La fonction cube

La fonction cube est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$ $+\infty$
x^3	$\nearrow$

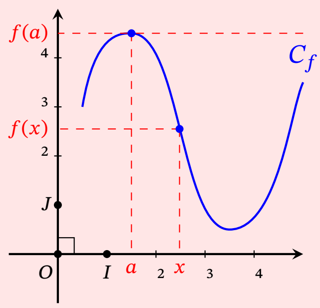


3 Extrema

3.1 Maximum

Définition : Maximum

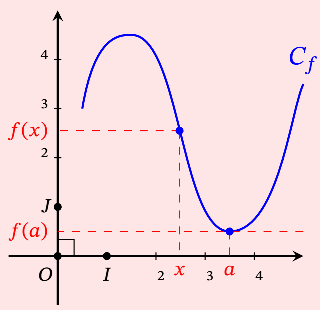
Dire que la fonction f admet un maximum en a sur un intervalle signifie que, pour tout nombre réel x appartenant à cet intervalle on a $f(x) \leqslant f(a)$.
Le maximum de f sur cet intervalle est alors égal à $f(a)$. Il est atteint en $x = a$.
$f(a)$ est la plus grande valeur de la fonction f sur l'intervalle.
C'est l'ordonnée du point le plus haut de la courbe C_f.



3.2 Minimum

Définition : Minimum

Dire que la fonction f admet un minimum en a sur un intervalle signifie que, pour tout nombre réel x appartenant à cet intervalle on a $f(x) \geqslant f(a)$.
Le minimum de f sur cet intervalle est alors égal à $f(a)$. Il est atteint en $x = a$.
$f(a)$ est la plus petite valeur de la fonction f sur l'intervalle.
C'est l'ordonnée du point le plus bas de la courbe C_f.



Remarque

- Si le maximum (minimum) existe, celui-ci est unique ; cependant, il peut être atteint pour plusieurs valeurs de x.
- Maximum et minimum constituent les **extrema** de la fonction.