MATHEMATIQUES
Les nombres : entraînement 2 (corrigé)

Exercice 1

1. a. Il y a 5 groupes de 29 souris. $5 \times 29 = 145$. Il y a donc 145 souris au total.

Il y a 2 groupes de souris non vaccinées (puisque il y en a 5 au total) contenant chacun 23 souris ayant développé la maladie. Il y a donc $2 \times 23 = 46$ souris malades.

La proportion de souris malades lors de ce test est $\dfrac{46}{145}$.

En effet, il y a 46 souris ayant développé la maladie sur 145 souris.

Proportion

La proportion de A dans E est donnée par le quotient :

$$\frac{\text{Effectif de } A}{\text{Effectif de } E}$$

b. Les décompositions en facteurs premiers de 46 et 145 sont : $46 = 2 \times 23$ et $145 = 5 \times 29$.
Ces deux décompositions permettent de dire que le seul diviseur commun à 46 et 145 est 1, on ne peut donc pas simplifier cette fraction.

Dans un laboratoire B on informe que $\dfrac{140}{870}$ des souris ont été malades.

2. a.

$$\begin{array}{r|l} 140 & 2 \\ 70 & 2 \\ 35 & 5 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array}$$

La décomposition en facteurs premiers de 140 est : $140 = 2 \times 2 \times 5 \times 7$.

$$\begin{array}{r|l} 870 & 2 \\ 435 & 3 \\ 145 & 5 \\ 29 & 29 \\ 1 & \end{array}$$

La décomposition en facteurs premiers de 870 est : $870 = 2 \times 3 \times 5 \times 29$.

b. $\dfrac{140}{870} = \dfrac{\cancel{2} \times 2 \times \cancel{5} \times 7}{\cancel{2} \times 3 \times \cancel{5} \times 29} = \dfrac{14}{87}$.

La forme irréductible de la proportion de souris malades dans le laboratoire B est $\dfrac{14}{87}$.

Exercice 2

Si on note x le nombre entier choisi.
On obtient successivement :
- $x + 3$.
- $7(x + 3) = 7x + 21$.
- $7x + 21 + 3x = 10x + 21$
- $10x + 21 - 21 = 10x$.

Le résultat final de ce programme est $10x$. Le résultat final est donc un multiple de 10, et par conséquent il est impossible d'obtenir 55 comme résultat.

Exercice 3

$3 + 4 + 5 = 12$ et 12 est bien divisible par 3.
$7 + 8 + 9 = 24$ et 24 est bien divisible par 3.
$12 + 13 + 14 = 39$ et 39 est bien divisible par 3.

On conjecture que la somme de trois entiers consécutifs est divisible par 3.

Démonstration
Pour démontrer un résultat général, on passe par le calcul littéral.

Si on note n le plus entier, le suivant est $n + 1$ et le suivant est $n + 2$.
La somme de ces trois entiers est $n + (n + 1) + (n + 2) = 3n + 3 = 3(n + 1)$.
Puisque la somme de trois entiers consécutifs quelconques s'écrit 3 fois un nombre entier, on en déduit que la somme de trois entiers consécutifs est divisible par 3.

Exercice 4

1. a. L'aire d'un rectangle se calcule à l'aide de la formule : $\boxed{\text{Longueur} \times \text{largeur}}$.
Ici, Longueur $= \sqrt{8} - \sqrt{2}$ et Largeur $= \sqrt{8} - \sqrt{2}$.

$$\begin{array}{rcl}
\text{Aire}(ABCD) & = & (\sqrt{8} - \sqrt{2})(\sqrt{8} + 2\sqrt{2}) \\
 & = & \sqrt{8} \times \sqrt{8} + \sqrt{8} \times 2\sqrt{2} - \sqrt{2} \times \sqrt{8} \\
 & = & 8 + 2\sqrt{16} - 2 \times 2 = 8 + 2 \times 4 - 4 - 4 \\
 & = & 8
\end{array}$$

L'aire du rectangle $ABCD$ est donc bien un nombre entier.

b. Le périmètre d'un rectangle est donné par la formule : $\boxed{2 \times (\text{Longueur} \ + \ \text{Largeur})}$.
On obtient :

$$\begin{array}{rcl}
\text{Périmètre}(ABCD) & = & 2\left[(\sqrt{8} - \sqrt{2}) + (\sqrt{8} + 2\sqrt{2})\right] \\
 & = & 2(\sqrt{8} + 2\sqrt{2} + \sqrt{8} - \sqrt{2}) \\
 & = & 2(2\sqrt{8} + \sqrt{2}) = 4\sqrt{8} + 2\sqrt{2} \\
 & = & 4\sqrt{2^2 \times 2} + 2\sqrt{2} \\
 & = & 8\sqrt{2} + 2\sqrt{2} \\
 & = & 10\sqrt{2}
\end{array}$$

2. Dans le triangle BCD rectangle en C, d'après le théorème de Pythagore :

$$\begin{array}{rcl}
DC^2 + CB^2 & = & BD^2 \\
(\sqrt{8} + 2\sqrt{2})^2 + (\sqrt{8} - \sqrt{2})^2 & = & BD^2 \\
(2\sqrt{2} + 2\sqrt{2})^2 + (2\sqrt{2} - \sqrt{2})^2 & = & BD^2 \\
(4\sqrt{2})^2 + (\sqrt{2}^2 & = & BD^2 \\
16 \times 2 + 2 & = & BD^2 \\
BD^2 & = & 34 \\
BD & = & \sqrt{34}
\end{array}$$

Technique
On simplifie le calcul à l'aide de :
$\sqrt{8} = \sqrt{2^2 \times 2} = \sqrt{2^2} \times \sqrt{2} = 2\sqrt{2}$

Exercice 5

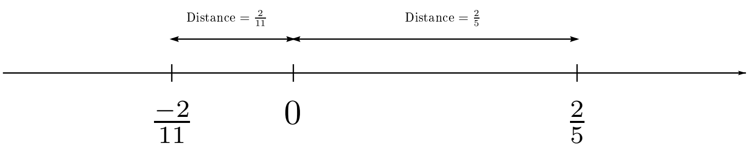
$$\begin{aligned} A = &= 2\sqrt{756} - 3\sqrt{525} \\ &= 2\sqrt{36 \times 21} - 3\sqrt{25 \times 21} \\ &= 2\sqrt{6^2} \times \sqrt{21} - 3\sqrt{5^2} \times \sqrt{21} \\ &= 12\sqrt{21} - 15\sqrt{21} \\ &= -3\sqrt{21} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B = &= \frac{\sqrt{756}}{\sqrt{7}} - \sqrt{\frac{525}{7}} \\ &= \frac{\sqrt{6^2 \times 21}}{\sqrt{7}} - \frac{\sqrt{5^2 \times 21}}{\sqrt{7}} \\ &= \frac{6\sqrt{21} - 5\sqrt{21}}{\sqrt{7}} \\ &= \frac{\sqrt{21}}{\sqrt{7}} \\ &= \frac{\sqrt{3} \times \cancel{\sqrt{7}}}{\cancel{\sqrt{7}}} \\ &= \sqrt{3} \end{aligned}$$

Exercice 6

On calcule d'abord la distance qu'il y a entre les deux nombres $\left(\frac{-2}{11} \text{ et } \frac{2}{5}\right)$.

De $\frac{-2}{11}$ à 0, il y a une distance de $\frac{2}{11}$ et de 0 à $\frac{2}{5}$ il y a une distance de $\frac{2}{5}$.



La distance entre les deux nombres est donc :

$$\frac{2}{11} + \frac{2}{5} = \frac{10}{55} + \frac{22}{55} = \frac{32}{55}$$

Distance

La distance entre deux nombres est la différence entre le plus grand et le plus petit. Ici : $\frac{2}{5} - \frac{-2}{11} = \frac{2}{5} + \frac{2}{11}$.

Le nombre cherché se situe aux $\frac{2}{3}$ de la distance entre $\frac{-2}{11}$ et $\frac{2}{5}$ à partir de $\frac{-2}{11}$. Pour déterminer le nombre cherché, on calcule $\frac{-2}{11} + \frac{2}{3} \times \frac{32}{55}$.

$$\frac{-2}{11} + \frac{2}{3} \times \frac{32}{55} = \frac{-2}{11} + \frac{64}{165} = \frac{-2 \times 15}{11 \times 15} + \frac{64}{165} = \frac{34}{165}.$$

Le nombre qui se cache sous le point d'interrogation est $\frac{34}{165}$.

Pour comprendre

Pour comprendre le problème, on peut dans un premier temps, remplacer les nombres $\frac{-2}{11}$ et $\frac{2}{5}$ par -4 et 5 par exemple. Placez-les sur une droite et écrivez le nombre solution. Comment l'obtient-on ?