

MATHEMATIQUES
Variations et extremums : entraînement savoir-faire 2 (corrigé)

Exercice 1

$$f(x) = -5x + 8$$

$m = -5 < 0$, donc f est strictement décroissante sur \mathbb{R} .

x	$-\infty$	$+\infty$
$f(x)$	↘	

$$g(x) = -4 + x$$

$m = 1$ donc g est strictement croissante sur \mathbb{R} .

x	$-\infty$	$+\infty$
$g(x)$	↗	

$$h(x) = 3$$

$m = 0$ donc h est constante sur \mathbb{R} .

x	$-\infty$	$+\infty$
$h(x)$	3 → 3	

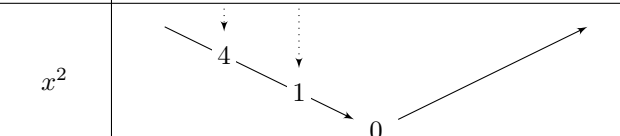
Exercice 2

1. Voir tableaux ci-dessous.

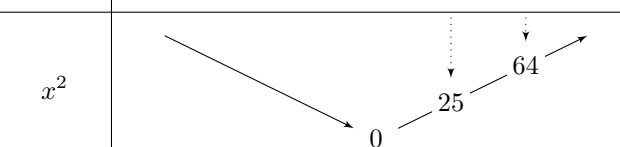
- Si $x \in [-2 ; -1]$, alors $x^2 \in [1 ; 4]$.

Pensez-y !

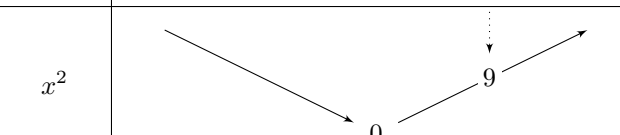
Il y a une inversion de l'ordre entre les nombres et les images du fait de la décroissance de la fonction carré sur $] -\infty ; 0]$. Donc, faites attention de bien mettre les nombres dans le bon ordre dans l'intervalle image.

x	$-\infty$	-2	-1	0	$+\infty$
x^2					

- Si $x \in [5 ; 8]$, alors $x^2 \in [25 ; 64]$.

x	$-\infty$	0	5	8	$+\infty$
x^2					

- Si $x > 3$, alors $x^2 > 9$

x	$-\infty$	0	3	$+\infty$
x^2				

- Si $x < -5$, alors $x^2 \geq 25$

x	$-\infty$	-5	0	$+\infty$
x^2		25	0	

Attention

Sur $[-4 ; 1]$, la fonction carré n'est pas monotone. On regarde donc le minimum et le maximum de x^2 lorsque $x \in [-4 ; 1]$. La réponse $[1 ; 16]$ est fautive puisque lorsque $x = 0, 5 \in [-4 ; 1]$, $x^2 = 0, 25 \notin [1 ; 16]$.

- Si $x \in [-4 ; 1]$, alors $x^2 \in [0 ; 16]$

x	$-\infty$	-4	0	1	$+\infty$
x^2		16	0	1	

Attention

Ici, on ne demande pas un encadrement de x ! Placez 3 dans le tableau de variations aux bons endroits (lorsque $x \in \mathbb{R}$, x^2 prend 2 fois la valeur 3).

- • Si $x^2 > 3$ alors $x \in]-\infty ; -\sqrt{3}[\cup]\sqrt{3} ; +\infty[$.

x	$-\infty$	$-\sqrt{3}$	0	$\sqrt{3}$	$+\infty$
x^2		3	0	3	

2. a. Comparaison de $(-0,81)^2$ et $(-0,805)^2$

x	$-\infty$	$-0,81$	$-0,805$	0	$+\infty$
x^2		$(-0,81)^2$	$(-0,805)^2$	0	

Méthode

On place dans le tableau les nombres $(-0,81)$ et $(-0,805)$ ainsi que les images par la fonction carré correspondantes, puis on compare ces images en indiquant le sens de variation de la fonction carré qui permet la comparaison.

On a $-0,81 < -0,805$

Comme la fonction carré est strictement décroissante sur $]-\infty ; 0]$ (qui contient les nombres $(-0,81)$ et $(-0,805)$), les images sont rangées dans l'ordre inverse. Ainsi,

$$(-0,81)^2 > (-0,805)^2.$$

b. Comparaison de $3,2^2$ et $3,02^2$

x	$-\infty$	0	$3,02$	$3,2$	$+\infty$
x^2		0	$3,02^2$	$3,2^2$	

On a $3,02 < 3,2$

Comme la fonction carré est strictement croissante sur $[0 ; +\infty[$ (qui contient les nombres 3,02 et 3,2), les images sont rangées dans le même ordre. Ainsi,

$$3,02^2 < 3,2^2.$$

Exercice 3

1. La fonction racine carrée est définie sur $[0 ; +\infty[$ et elle est strictement croissante sur cet intervalle.

x	0	0,1081	0,123	$+\infty$
\sqrt{x}	0	$\sqrt{0,1081}$	$\sqrt{0,123}$	\nearrow

2. On a $0,1081 < 0,123$

Comme la fonction racine carrée est strictement croissante sur $[0 ; +\infty[$ (qui contient les nombres 0,1081 et 0,123), les images sont rangées dans le même ordre. Ainsi,

$$\sqrt{0,1081} < \sqrt{0,123}$$

3. Avec le tableau de variations :

x	0	5	9	$+\infty$
\sqrt{x}	0	$\sqrt{5}$	3	\nearrow

$x \in [5 ; 9]$ signifie $5 \leq x \leq 9$ et comme la fonction racine carrée est strictement croissante sur $[0 ; +\infty[$, on a :

$$\sqrt{5} \leq \sqrt{x} \leq \sqrt{9} \text{ soit } \sqrt{5} \leq \sqrt{x} \leq 3$$

Exercice 4

1. L'ensemble de définition de la fonction inverse est \mathbb{R}^* .

Remarque

0 est le seul réel qui n'a pas d'inverse. En effet, si 0 avait un inverse, alors il existerait un réel a tel que $a \times 0 = 1$. Or $a \times 0 = 0$, on obtient donc l'égalité $0 = 1$. Ce qui est faux (vous le savez !). Donc 0 n'a pas d'inverse. Ce raisonnement porte le nom de raisonnement par l'absurde.

Tableau de variations de la fonction inverse :

x	$-\infty$	-8	-7	0	4,25	4,3	$+\infty$
$\frac{1}{x}$	\searrow	$-\frac{1}{8}$	$-\frac{1}{7}$		$\frac{1}{4,25}$	$\frac{1}{4,3}$	\searrow

2. • $4,25 < 4,3$.

La fonction inverse est strictement décroissante sur $]0 ; +\infty[$.
Les nombres (positifs) et les images sont donc rangés dans l'ordre inverse.

$$\text{Ainsi : } \frac{1}{4,25} > \frac{1}{4,3}.$$

- $-8 < -7$. La fonction inverse est strictement décroissante sur $] -\infty ; 0[$.
Les nombres (négatifs) et les images sont donc rangés dans l'ordre inverse.

$$\text{Ainsi : } -\frac{1}{8} > -\frac{1}{7}.$$

Conseil

Visualisez la situation dans le tableau de variations en plaçant 4,25 et 4,3 et leurs images.

Exercice 5

1. Tableau de variations de la fonction cube :

x	$-\infty$	$-0,8$	$-0,12$	$0,12$	$0,8$	$+\infty$
x^3		$(-0,8)^3$	$(-0,12)^3$	$(0,12)^3$	$(0,8)^3$	

2. On a $0,12 < 0,8$

Comme la fonction cube est strictement croissante sur \mathbb{R} , les images sont rangées dans le même ordre. Ainsi,

$$0,12^3 < 0,8^3$$

3. On a $-0,8 < -0,12$

Comme la fonction cube est strictement croissante sur \mathbb{R} , les images sont rangées dans le même ordre. Ainsi,

$$(-0,8)^3 < (-0,12)^3$$