MATHEMATIQUES
Intégration : les démonstrations

Soit f une fonction définie et continue sur un intervalle I contenant un réel a.
La fonction F définie sur l'intervalle I par $F(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)dt$ est l'unique primitive de la fonction f sur l'intervalle I qui s'annule en a.

On démontre ce théorème dans le cas où la fonction f est croissante sur l'intervalle I.
Soit $x \in I$ et $h \in \mathbb{R}$ tel que $x + h \in I$.
On a alors : $F(x+h) - F(x) = \displaystyle\int_a^{x+h} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt = \int_a^{x+h} f(t)dt + \int_x^a f(t)dt = \int_x^{x+h} f(t)dt$ (d'après la relation de Chasles).

- Si $h > 0$, on a donc $x \leqslant t \leqslant x + h$ et alors, comme la fonction f est croissante sur l'intervalle I, $f(x) \leqslant f(t) \leqslant f(x+h)$.
  Donc, $\displaystyle\int_x^{x+h} f(x)dt \leqslant \int_x^{x+h} f(t)dt \leqslant \int_x^{x+h} f(x+h)dt$ (ordre de l'intégrale et $x \leqslant x+h$)
  $\iff f(x)\displaystyle\int_x^{x+h} 1dt \leqslant \int_x^{x+h} f(t)dt \leqslant f(x+h)\int_x^{x+h} 1dt$ (linéarité de l'intégrale car $f(x)$ et $f(x+h)$ sont des constante par rapport à la variable t)
  $\iff hf(x) \leqslant \displaystyle\int_x^{x+h} f(t)dt \leqslant hf(x+h)$ (intégration d'une fonction constante égale à 1 sur l'intervalle $[x; x+h]$)
  Finalement $f(x) \leqslant \dfrac{F(x+h) - F(x)}{h} \leqslant f(x+h)$.
  Or comme la fonction f est continue sur l'intervalle I, donc en x, on a alors $\lim\limits_{h \to 0} f(x+h) = f(x)$.
  Donc d'après le théorème des gendarmes on obtient $\lim\limits_{\substack{h \to 0 \\ h>0}} \dfrac{F(x+h) - F(x)}{h} = f(x)$.
- Si $h < 0$, on a donc $x + h \leqslant t \leqslant x$ et alors, comme la fonction f est croissante sur l'intervalle I, $f(x+h) \leqslant f(t) \leqslant f(x)$.
  Donc, $\displaystyle\int_{x+h}^x f(x+h)dt \leqslant \int_{x+h}^x f(t)dt \leqslant \int_{x+h}^x f(x)dt$ (ordre de l'intégrale, car $x+h \leqslant x$)
  $\iff f(x+h)\displaystyle\int_{x+h}^x 1dt \leqslant \int_{x+h}^x f(t)dt \leqslant f(x)\int_{x+h}^x 1dt$ (linéarité de l'intégrale car $f(x+h)$ et $f(x)$ sont des constantes par rapport à la variable t).
  $\iff -hf(x+h) \leqslant \displaystyle\int_{x+h}^x f(t)dt \leqslant -hf(x)$ (intégration d'une fonction constante égale à 1 sur l'intervalle $[x+h; x]$).
  Finalement $f(x+h) \leqslant \dfrac{F(x) - F(x+h)}{-h} \leqslant f(x) \iff f(x+h) \leqslant \dfrac{F(x+h) - F(x)}{h} \leqslant f(x)$.
  De la même façon on obtient $\lim\limits_{\substack{h \to 0 \\ h<0}} \dfrac{F(x+h) - F(x)}{h} = f(x)$ car f est une fonction continue sur l'intervalle I.
- Par conséquent, F est dérivable en x et $F'(x) = f(x)$.
  Comme ce résultat est vrai pour tout x de l'intervalle I, F est une primitive de la fonction f sur l'intervalle I.
  De plus, on a $F(a) = \displaystyle\int_a^a f(t)dt = 0$.
  Donc on a démontré que F est l'unique primitive de la fonction f qui s'annule en a.

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et F une primitive de la fonction f sur l'intervalle I. Alors pour tous réels a et b dans l'intervalle I : $\displaystyle\int_a^b f(x)dx = [F(t)]_a^b = F(b) - F(a)$.

$\displaystyle\int_a^x f(t)dt$ est, d'après ce qui précède, la primitive de la fonction f sur l'intervalle I qui s'annule en a.

Toutes les primitives de la fonction f sur l'intervalle I s'écrivent alors, $\displaystyle\int_a^x f(t)dt + k$ avec $k \in \mathbb{R}$.

Soit F l'une d'entre elles.

Alors $F(b) - F(a) = \displaystyle\int_a^b f(t)dt - \int_a^a f(t)dt = \int_a^b f(t)dt$.

Soient u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I, telles que leurs dérivées $u^{'}$ et $v^{'}$ soient continues sur l'intervalle I.

Alors pour tous réels a et b de l'intervalle I : $\displaystyle\int_a^b u(x)v'(x)dx = \big[u(x)v(x)\big]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)dx$

La fonction uv est dérivable sur l'intervalle I avec $(uv)' = u'v + uv'$.

Ainsi $uv' = (uv)' - u'v$.

Puisque (uv'), $(uv)'etu'v$ sont continues sur l'intervalle I, on en déduit que $\displaystyle\int_a^b (uv')(x)dx = \int_a^b \big[(uv)'(x) - (u'v)(x)\big]dx$.

Ainsi par linéarité de l'intégration : $\displaystyle\int_a^b (uv')(x)dx = \int_a^b (uv)'(x)dx - \int_a^b (u'v)(x)dx$.

Or uv est une primitive de $(uv)'$ sur l'intervalle I, on obtient donc : $\displaystyle\int_a^b u(x)v'(x)dx = \big[u(x)v(x)\big]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)dx$.