

Primitives et équations différentielles

Les savoir-faire du chapitre

- ▶ 110. Montrer qu'une fonction est primitive d'une fonction donnée.
- ▶ 111. Déterminer les primitives d'une fonction donnée.
- ▶ 112. Résoudre une équation différentielle de la forme $y' = ay$.
- ▶ 113. Résoudre une équation différentielle de la forme $y' = ay + b$.
- ▶ 114. Résoudre une équation différentielle de la forme $y' = ay + f$.



L'intro de Nabolos

Après la découverte par Becquerel des rayons uraniques, Marie Curie choisit en 1897 comme sujet de thèse l'étude des propriétés de ces rayons.

Elle découvre, aidée de Pierre, d'autres matières radioactives que l'uranium : le polonium et le radium.

Le nombre d'atomes de radium qui se désintègrent en un temps donné est proportionnel à leur nombre à chaque instant, c'est à dire $N'(t) = -aN(t)$, où $N(t)$ est le nombre d'atomes à l'instant t et a une constante positive.

En physique, on montre expérimentalement que les noyaux radioactifs « meurent sans vieillir ». C'est Gamov qui le premier, en 1928, a expliqué ce phénomène à l'aide de la toute nouvelle mécanique quantique.

On admet que l'équation différentielle de désintégration du polonium est $y' = -0,0076y$.

L'objectif est alors d'établir l'expression de la fonction N qui dépend du temps t , en année ; puis de déterminer la demi-vie du polonium. C'est à dire le temps au bout duquel il reste la moitié du nombre d'atomes de polonium qu'il y avait initialement.





110 Montrer qu'une fonction est primitive d'une fonction donnée.

- 1) Soient les fonctions f et g définies sur \mathbb{R} par $f(x) = xe^x$ et $g(x) = (x - 1)e^x$.
- a) Montrer que g est une primitive de f sur \mathbb{R} .
 - b) En déduire toutes les primitives de f sur \mathbb{R} .

.....

.....

.....

.....

.....

.....

- 2) Soient les fonctions f et g définies sur $]2; +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{2x + 1}{x - 2} \text{ et } g(x) = 2x + 5 \ln(x - 2)$$

- a) Montrer que g est une primitive de f sur $]2; +\infty[$.
- b) Déterminer la primitive de f sur $]2; +\infty[$ qui s'annule en 3.

.....

.....

.....

.....

.....

111 Déterminer les primitives d'une fonction donnée.

- 1) Déterminer une primitive sur \mathbb{R} de la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = x^2 + 5x + 3$.

.....

.....

- 2) Déterminer une primitive sur $]0; +\infty[$ de la fonction g définie sur $]0; +\infty[$ par $g(x) = \frac{3}{x} - \frac{2}{x^2}$.

.....

.....

- 3) Déterminer une primitive sur \mathbb{R}^+ de chacune des fonctions f, g, h et u définies sur \mathbb{R}^+ par :

a) $f(x) = 6x(x^2 - 1)^3$ b) $g(x) = \frac{5}{2x + 3}$ c) $h(x) = e^{2x+1}$ d) $u(x) = \frac{2}{\sqrt{3x + 4}}$

.....

.....





114

Résoudre une équation différentielle de la forme $y' = ay + f$.

Soit l'équation différentielle $(E) : y' = y + x - 3$.

1) Montrer que la fonction g définie sur \mathbb{R} par $g(x) = -x + 2$ est une solution de (E) .

2) En déduire toutes les solutions de (E) .

.....

.....

.....

.....

.....

.....

