MATHEMATIQUES
Représentations paramétriques et équations cartésiennes : entraînement 1 (corrigé)

Exercice 1

1. a. Coordonnées des points P, Q, R et Ω.

On a $P(2\ ;\ 0\ ;\ 0)$; $Q(0\ ;\ 0\ ;\ 2)$, $R(0\ ;\ 4\ ;\ 6)$ et $\Omega\,(3\ ;\ 3\ ;\ 3)$.

Pas compliqué

Le point Ω étant le centre du cube, c'est le milieu de $[AG]$ ave $G(6\ ;\ 6\ ;\ 6)$ et $A(0\ ;\ 0\ ;\ 0)$.

b. $\overrightarrow{PQ}\begin{pmatrix}-2\\0\\2\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{PR}\begin{pmatrix}-2\\4\\6\end{pmatrix}$.

$\overrightarrow{n}$ est normal au plan (PQR) si, et seulement si, il est orthogonal aux deux vecteurs non colinéaires $\overrightarrow{PQ}$ et $\overrightarrow{PR}$.
On doit avoir $\overrightarrow{n}.\overrightarrow{PQ}=0$ et $\overrightarrow{n}.\overrightarrow{PR}=0$ donc :

$$\begin{cases}-2+2c=0\\-2+4b+6c=0\end{cases}\iff\begin{cases}c=1\\b=-1\end{cases}.$$

Les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{n}$ sont

$$\overrightarrow{n}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$$

c. $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan (PQR) donc (PQR) :

$$x-y+z+d=0$$

Vecteur normal

Si $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix}a\\-b\\c\end{pmatrix}$ est un vecteur normal d'un plan, alors une équation cartésienne du plan est donnée par $ax+by+cz+d=0$. Pour déterminer la valeur de d on utilise les coordonnées d'un point d ce plan.

Or $P(2\ ;\ 0\ ;\ 0)\in(PQR)$ donc $x_P-y_P+z_P+d=0$.

Finalement :

$$(PQR) : x-y+z-2=0.$$

2. a. Représentation paramétrique de Δ.

Un vecteur directeur de Δ est donc $\vec{n}$.

Une représentation paramétrique de Δ est donc :

$$\begin{cases} x = 3 + t \\ y = 3 - t \\ z = 3 + t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}$$

Conseil

Faites un petit schéma pour visualiser la situation. Comme la droite est perpendiculaire au plan, un vecteur normal du plan est un vecteur directeur de la droite.

Un point, un vecteur

Pour cette représentation paramétrique, on a choisi le point Ω et le vecteur directeur $\vec{n}$.

b. Le point I est à l'intersection de la droite Δ et du plan (PQR).
Ses coordonnées vérifient la représentation paramétrique et l'équation cartésienne du plan.
On doit donc avoir :

$$\begin{cases} x = 3 + t \\ y = 3 - t \\ z = 3 + t \\ x - y + z - 2 = 0 \end{cases}$$

On en déduit : $(3 + t) - (3 - t) + (3 + t) - 2 = 0 \iff 3t + 1 = 0 \iff t = -\dfrac{1}{3}$.
On calcule alors les valeurs de x, y et z.
Les coordonnées de I sont $I\left(3 - \dfrac{1}{3} \ ; \ 3 + \dfrac{1}{3} \ ; \ 3 - \dfrac{1}{3}\right)$ donc $I\left(\dfrac{8}{3} \ ; \ \dfrac{10}{3} \ ; \ \dfrac{8}{3}\right)$.

Exercice 2

1. Le point H a pour coordonnées $(1 \ ; \ 1 \ ; \ 1)$ et $\overrightarrow{BH}$ qui est un vecteur directeur de la droite (BH) a pour coordonnées : $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Ainsi, une représentation paramétrique de la droite (BH) est :

$$\begin{cases} x & = & t \\ y & = & t \\ z & = & t \end{cases}$$

Explications

En prenant le vecteur $\overrightarrow{BH}$ comme vecteur directeur et le point $B(0 \ ; \ 0; \ 0 \ )$ comme point.

Autre façon de rédiger

Le point H a pour coordonnées $(1 \ ; \ 1 \ ; \ 1)$.

$$M \in (BH) \iff \text{il existe } t \in \mathbb{R} \ \overrightarrow{BM} = t\overrightarrow{BH} \iff \begin{cases} x - 0 & = & t(1-0) \\ y - 0 & = & t(1-0) \\ z - 0 & = & t(1-0) \end{cases} \iff \begin{cases} x & = & t \\ y & = & t \\ z & = & t \end{cases}$$

2. On a $D(1~;~1~;~0)$, $E(1~;~0~;~1)$ et $G(0~;~1~;~1)$.
D'où $\overrightarrow{DE}(0~;~-1~;~1)$, $\overrightarrow{DG}(-1~;~0~;~1)$.

Comme $\overrightarrow{BH}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$,

On a $\overrightarrow{DE}\cdot\overrightarrow{BH}=0$ et $\overrightarrow{DG}\cdot\overrightarrow{BH}=0$, alors ce vecteur est orthogonal à $\overrightarrow{DE}$ et à $\overrightarrow{DG}$, soit à deux vecteurs non colinéaires du plan (DEG).

Le vecteur $\overrightarrow{BH}$ est donc normal au plan (DEG) : la droite (BH) est perpendiculaire au plan (DEG).

3. D'après la question précédente, un vecteur normal au plan (DEG) est $\overrightarrow{BH}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$, donc une équation cartésienne du plan (DEG) est de la forme : $1x+1y+1z+d=0$.

On a par exemple $D\in(DEG) \iff 1+1+0+d=0 \iff d=-2$.
Une équation cartésienne du plan (DEG) est $x+y+z-2=0$.

4. les coordonnées de P vérifient l'équation paramétrique de la droite (BH) et l'équation du plan (DEG) soit :

$$\left\{\begin{array}{rcl}x&=&t\\y&=&t\\z&=&t\\x+y+z-2&=&0\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl}x&=&t\\y&=&t\\z&=&t\\t+t+t-2&=&0\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl}x&=&t\\y&=&t\\z&=&t\\t&=&\dfrac{2}{3}\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl}x&=&\dfrac{2}{3}\\y&=&\dfrac{2}{3}\\z&=&\dfrac{2}{3}\\t&=&\dfrac{2}{3}\end{array}\right.$$

On a donc $P\left(\dfrac{2}{3}~;~\dfrac{2}{3}~;~\dfrac{2}{3}\right)$.

5. On a :
$PD^2=\left(1-\dfrac{2}{3}\right)^2+\left(1-\dfrac{2}{3}\right)^2+\left(0-\dfrac{2}{3}\right)^2=\dfrac{2}{3}$;
$PE^2=\left(1-\dfrac{2}{3}\right)^2+\left(0-\dfrac{2}{3}\right)^2+\left(1-\dfrac{2}{3}\right)^2=\dfrac{2}{3}$;

Conjecture

En regardant le graphique on se rend bien compte que le point P a une position particulière pour le triangle équilatéral. Il reste ensuite à trouver une méthode pour en apporter la preuve !

$PG^2=\left(0-\dfrac{2}{3}\right)^2+\left(1-\dfrac{2}{3}\right)^2+\left(1-\dfrac{2}{3}\right)^2=\dfrac{2}{3}$.
On a donc : $PD^2=PE^2=PG^2$, soit $PD=PE=PG$.
Le point P est donc équidistant des trois sommets du triangle DEG, c'est donc le centre du cercle circonscrit au triangle DEG, mais comme celui-ci est équilatéral car ses trois côtés sont des diagonales de carrés de côté 1, le point P est orthocentre, centre du cercle circonscrit et centre de gravité du triangle équilatéral DEG).

Autrement

On montre que P est le centre de gravité du triangle DEG en montrant par exemple que $\overrightarrow{GP}=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{GI}$ avec I milieu de $[DE]$.
On a $\overrightarrow{GP}\left(\dfrac{2}{3}~;~-\dfrac{1}{3}~;~-\dfrac{1}{3}\right)$ et $\overrightarrow{GI}\left(1~;~-\dfrac{1}{2}~;~-\dfrac{1}{2}\right)$ et on a bien $\overrightarrow{GP}=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{GI}$ ce qui prouve que P est le centre de gravité du triangle DEG.

Exercice 3

Partie A :

1. Dans le repère orthonormé $\left(D~;~\overrightarrow{DA},~\overrightarrow{DC},~\overrightarrow{DH}\right)$ on a

D$(0\,;0\,;0)$, $F(1~;~1~;~1)$, $E(1~;~0~;~1)$, $B(1~;~1~;~0)$ et $G(0~;~1~;~1)$

donc $\overrightarrow{DF}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{EB}\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$ et , $\overrightarrow{EG}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$

on a alors $\overrightarrow{DF}\cdot\overrightarrow{EB}=0+1-1=0$ et $\overrightarrow{DF}\cdot\overrightarrow{EG}=-1+1+0=0$

$\overrightarrow{DF}$ est donc orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (EBG), il est bien normal à ce plan.

2. $\overrightarrow{DF}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan (EBG).

Donc (EBG) : $x+y+z+d=0$ or $E(1~;~0~;~1)\in(EBG)$, d'où $1+1+d=0 \iff d=-2$

Finalement une équation de (EBG) est : $x+y+z-2=0$.

3. Une représentation paramétrique de (DF) est $\begin{cases}x=t\\y=t\\z=t\end{cases}\quad(t\in\mathbb{R})$

> **Explication**
>
> Le vecteur $\overrightarrow{DF}$ de coordonnées $(1~;~1~;~1)$ est un vecteur directeur et la droite passe par l'origine du repère... donc c'est assez rapide !

Les coordonnées de I doivent donc vérifier le système : $\begin{cases}x=t\\y=t\\z=t\\x+y+z-2=0\end{cases}$.

Il en résulte $3t-2=0 \iff t=\dfrac{2}{3}$.

On a alors $I\left(\dfrac{2}{3}~;~\dfrac{2}{3}~;~\dfrac{2}{3}\right)$

Partie B

1.
- Si M est confondu avec D alors $\widehat{EMB}=\widehat{EDB}=\dfrac{\pi}{3}$ car EDB est un triangle équilatéral.
- Si M est confondu avec F alors $\widehat{EMB}=\widehat{EFB}=\dfrac{\pi}{2}$ car EFB est un triangle rectangle en F.

2. a. $\overrightarrow{DM}=x\overrightarrow{DF}$ et $\overrightarrow{DF}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{DM}\begin{pmatrix}x\\x\\x\end{pmatrix}$ et $D(0~;~0~;~0)$, on a donc bien $M(x~;~x~;~x)$

b. $\overrightarrow{ME}\begin{pmatrix}1-x\\-x\\1-x\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{MB}\begin{pmatrix}1-x\\1-x\\-x\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{ME}\cdot\overrightarrow{MB}=(1-x)^2-x(1-x)-x(1-x)=(1-x)(1-3x)=3x^2-4x+1$

De plus $\overrightarrow{ME}\cdot\overrightarrow{MB}=ME\times MB\times\cos\left(\widehat{EMB}\right)$

$$\begin{aligned}&=\sqrt{(1-x)^2+(-x)^2+(1-x)^2}\sqrt{(1-x)^2+(1-x)^2+(-x)^2}\times\cos(\theta)\\&=\sqrt{3x^2-4x+2}\sqrt{3x^2-4x+2}\times\cos(\theta)\\&=(3x^2-4x+2)\cos(\theta)\end{aligned}$$

On a donc bien $\cos(\theta)=\dfrac{3x^2-4x+1}{3x^2-4x+2}$

3. a. Le triangle est rectangle en M si $\cos(\theta) = \cos\left(\widehat{EMB}\right) = 0$.

Il y a donc deux positions du point M :

Eh oui

Produit scalaire nul = angle droit !

Pour $x = \dfrac{1}{3}$ et pour $x = 1$ c'est à dire pour M en J ou pour M en F.

b. L'angle θ est maximal quand son cosinus est minimal c'est à dire quand $x = \dfrac{2}{3}$ autrement dit quand M est confondu avec I.

Pas évident

Pour un angle compris entre 0 et π, plus le cosinus de l'angle est grand, plus l'angle est petit. Donc c'est quand le cosinus de l'angle est le plus petit que l'angle sera la plus grand. La fonction cos est décroissante sur $[0\ ;\ \pi]$.