Terminale

MATHEMATIQUES
Bilan sur l'espace : QCM 1 (corrigé)

Pour chaque exercice, plusieurs réponses sont proposées. Déterminer celles qui sont correctes.

1.

Rappels

- Trois points distincts A, B et C sont alignés si deux vecteurs formés à l'aide de ces 3 points sont colinéaires.
- Deux vecteurs non nuls $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si, et seulement si, il existe un réel k tel que $\vec{v} = k\,\vec{u}$.
- Dans un repère $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ de l'espace, soit $A(x_A;y_A;z_A)$ et $B(x_B;y_B;z_B)$. Alors : $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \\ z_B - z_A \end{pmatrix}$

- On a $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$.

Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires si, et seulement si, il existe un réel k tel que $\overrightarrow{AC} = k\overrightarrow{AB}$.

Autrement dit, si le système suivant admet une unique solution :
$\begin{cases} 2 = 1k \\ 0 = 1k \\ -2 = 0k \end{cases}$. Ce système n'a pas de solution donc les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires donc les points A, B et C ne sont pas alignés.

Plus rapidement

Cela revient à dire que les coordonnées de ces vecteurs sont proportionnelles. Elles ne le sont pas. Donc ...

- Trois points sont toujours coplanaires donc A, B et C le sont.

- On a montré au que les points A, B et C ne sont pas alignés, par conséquent ils définissent un plan.

Cours

Un plan est défini par :
- trois points non alignés ou
- deux droites sécantes ou
- deux droites strictement parallèles.

Réponse : b. et c.

2.

Rappels

Soit trois vecteurs non nuls $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ tels que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires.
$\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires si et seulement si il existe deux réels a et b tels que :

$$\vec{w} = a\,\vec{u} + b\,\vec{v}$$

- On a $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AD}\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ -6 \end{pmatrix}$.

Méthode

Pour montrer que quatre points sont coplanaires, il s'agit de démontrer que trois vecteurs formés à l'aide de ces quatre points sont coplanaires en écrivant l'un des vecteurs en fonction des deux autres.

Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires (leurs coordonnées ne sont pas proportionnelles).

Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$ sont coplanaires si, et seulement si, il existe deux réels a et b tels que :

$$\overrightarrow{AD} = a\overrightarrow{AB} + b\overrightarrow{AC}$$

Autrement dit, si le système suivant admet une unique solution : $\begin{cases} 4 = 1a + 2b \\ -2 = 1a + 0b \\ -6 = 0a - 2b \end{cases}$.

On trouve $a = -2$ et $b = 3$, Ce système une solution unique donc les vecteurs$\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$ sont coplanaires. Par conséquent, les points A, B, C et D sont coplanaires.

La réponse a. est vraie.

- On a $-2\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} -2 \times 1 + 3 \times 2 \\ -2 \times 1 + 3 \times 0 \\ -2 \times 0 + 3 \times (-2) \end{pmatrix}$ soit $-2\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ -6 \end{pmatrix}$

La réponse b. est vraie.

- $D \in (BC)$ si, et seulement si, les vecteurs $\overrightarrow{DB}$ et $\overrightarrow{DC}$ sont colinéaires.

On a $\overrightarrow{DB} \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ -6 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{DC} \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix}$.

Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires si, et seulement si, il existe un réel k tel que $\overrightarrow{AC} = k\overrightarrow{AB}$.

On a de façon évidente (!!!!?) $\overrightarrow{DB} = \dfrac{3}{2}\overrightarrow{DC}$, donc les vecteurs $\overrightarrow{DB}$ et $\overrightarrow{DC}$ sont colinéaires donc $D \in (BC)$.
La réponse c. est vraie.

Réponse : a. b. et c.

3. - Un vecteur directeur de Δ est $\vec{u} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Le vecteur $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de la droite (AB).

Les vecteurs $\vec{u}$ et $\overrightarrow{AB}$ ne sont pas colinéaires (coordonnées non proportionnelles), donc Δ n'est pas une représentation paramétrique de (AB).

Autre méthode

On étudie si les points A et B appartiennent à Δ.

$A \in \Delta$ si, et seulement si le système suivant, d'inconnue t, admet une unique solution : $\begin{cases} x_A = 1 = 2 - t \\ y_A = 0 = 1 - t \\ z_A = 2 = 2 + t \end{cases}$.

On obtient $\begin{cases} t = 1 \\ t = 1 \\ t = 0 \end{cases}$.

Ce système n'a pas de solution, donc A n'appartient pas à Δ.

La réponse a. est fausse.

- Soit $\mathcal{P}$ le plan de représentation paramétrique : $\begin{cases} x = 5 + t + 4t' \\ y = -2 - t - 2t' \\ z = -4 - 2t - 6t' \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$ et $t' \in \mathbb{R}$.

On étudie si A, B et C appartiennent à $\mathcal{P}$.

A appartient à $\mathcal{P}$ si, et seulement si le système suivant, d'inconnues t et t', admet une unique solution :

$$\begin{cases} x_A = 1 = 5 + t + 4t' \\ y_A = 0 = -2 - t - 2t' \\ z_A = 2 = -4 - 2t - 6t' \end{cases} \iff \begin{cases} t = -4 - 4t' \\ 0 = -2 - (-4 - 4t') - 2t' \\ 6 = -2(-4 - 4t') - 6t' \end{cases} \iff \begin{cases} t = 0 \\ t' = -1 \\ t' = -1 \end{cases}.$$

Ce système admet une solution unique donc A appartient au plan $\mathcal{P}$.

B appartient à $\mathcal{P}$ si, et seulement si le système suivant, d'inconnues t et t', admet une unique solution :

$$\begin{cases} x_B = 2 = 5 + t + 4t' \\ y_B = 1 = -2 - t - 2t' \\ z_B = 2 = -4 - 2t - 6t' \end{cases} \iff \begin{cases} t = -3 - 4t' \\ 3 = -(-3 - 4t') - 2t' \\ 6 = -2(-3 - 4t') - 6t' \end{cases} \iff \begin{cases} t = -3 \\ t' = 0 \\ t' = 0 \end{cases}.$$

Ce système admet une solution unique donc B appartient au plan $\mathcal{P}$.

C appartient à $\mathcal{P}$ si, et seulement si le système suivant, d'inconnues t et t', admet une unique solution :

$$\begin{cases} x_C = 3 = 5 + t + 4t' \\ y_C = 0 = -2 - t - 2t' \\ z_C = 0 = -4 - 2t - 6t' \end{cases} \iff \begin{cases} t = -2 - 4t' \\ 0 = -2 - (-2 - 4t') - 2t' \\ 0 = -4 - 2(-2 - 4t') - 6t' \end{cases} \iff \begin{cases} t = -2 \\ t' = 0 \\ t' = 0 \end{cases}.$$

Ce système admet une solution unique donc C appartient au plan $\mathcal{P}$.

La réponse b. est vraie.

- Soit $\mathcal{Q}$ le plan de représentation paramétrique : $\begin{cases} x = 1 + t + 2t' \\ y = t \\ z = 2 - 2t' \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$ et $t' \in \mathbb{R}$.

Représentation paramétrique d'un plan

Dans un repère $\left(\text{O} ; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$ de l'espace, on considère le plan $\mathscr{P}$ passant par un point $A(x_A ; y_A ; z_A)$ et de vecteurs directeurs non nuls $\vec{u}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix}$.

Un point $\text{M}(x ; y ; z)$ appartient au plan $\mathscr{P}$ si et seulement si il existe deux réels t et t' tels que :

$$\begin{cases} x = x_\text{A} + at + a't' \\ y = y_\text{A} + bt + b't' \\ z = z_\text{A} + ct + c't' \end{cases}$$

Ce système d'équations s'appelle une représentation paramétrique du plan $\mathscr{P}$.

$\mathcal{Q}$ passe donc par le point de coordonnées $(1 ; 0 ; 2)$ soit le point A et est dirigé par les vecteurs $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$ soit $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ qui ne sont pas colinéaires et dirigent le plan (ABC).

La réponse c. est vraie.

Réponse : b. et c.

4. • Un vecteur directeur de Δ est $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$. Or $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$ donc (AB) est un vecteur directeur de la droite Δ.

Par conséquent, $\Delta//(AB)$.

En prenant$t = 3$, on obtient $\begin{cases}x = 3\\y = 4\\z = 5\end{cases}$, donc $E \in \Delta$.

Δ n'est autre que la droite parallèle à (AB) et passant par E.

La réponse a. est vraie.

• Étudions si les points E, A, B et C sont coplanaires.

On a $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}2\\0\\-2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AE}\begin{pmatrix}2\\4\\3\end{pmatrix}$.

Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires.

Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AE}$ sont coplanaires si, et seulement si, il existe deux réels a et b tels que : $\overrightarrow{AE} = a\overrightarrow{AB}+b\overrightarrow{AC}$.

Autrement dit, si le système suivant admet une unique solution : $\begin{cases}1 = 1a + 2b\\4 = 1a + 0b\\3 = 0a - 2b\end{cases}$.

On obtient $\begin{cases}2 = 1\\a = 4\\b = -1,5\end{cases}$. Ce système n'a pas de solution donc les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AE}$ ne sont pas coplanaires.

Par conséquent, les points A, B, C et E ne sont pas coplanaires.

La réponse b. est fausse.

• Étudions si les points A, B, D et E sont coplanaires.

On a $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AD}\begin{pmatrix}4\\-2\\-6\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AE}\begin{pmatrix}2\\4\\3\end{pmatrix}$.

Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$ ne sont pas colinéaires.

Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AE}$ sont coplanaires si, et seulement si, il existe deux réels a et b tels que : $\overrightarrow{AE} = a\overrightarrow{AB}+b\overrightarrow{AD}$.

Autrement dit, si le système suivant admet une unique solution : $\begin{cases}2 = 1a + 4b\\4 = 1a - 2b\\3 = 0a - 6b\end{cases}$.

On obtient $\begin{cases}a = 4\\a = 3\\b = -0,5\end{cases}$. Ce système n'a pas de solution donc les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AE}$ ne sont pas coplanaires.

Par conséquent, les points A, B, D et E ne sont pas coplanaires.

La réponse c. est fausse.

Réponse : a.