MATHEMATIQUES
Représentations paramétriques et équations cartésiennes : entraînement savoir-faire (corrigé)

Exercice 1

Le cours

Soit $\overrightarrow{u}$ un vecteur de l'espace, différent du vecteur nul, et A un point de l'espace.
L'ensemble des points M tel que $\overrightarrow{AM} = t\overrightarrow{u}$ lorsque t décrit $\mathbb{R}$ est une droite.
C'est la droite passant par le point A et de vecteur directeur $\overrightarrow{u}$.
On la note $\mathcal{D}(A; \overrightarrow{u})$.
Il est important de noter que lorsque le paramètre t décrit $\mathbb{R}$, le point M décrit la droite $\mathcal{D}(A; \overrightarrow{u})$.

Soit $A(x_0; y_0; z_0)$, $\overrightarrow{u}(a; b; c)$ et $M(x; y; z)$.
La relation $\overrightarrow{AM} = t\overrightarrow{u}$ s'écrit alors :

$$\begin{cases} x - x_0 = at \\ y - y_0 = bt \\ z - z_0 = ct \end{cases} \text{ ou encore } \begin{cases} x = at + x_0 \\ y = bt + y_0 \\ z = ct + z_0 \end{cases}.$$

1. une représentation paramétrique de l'axe $(O; \overrightarrow{i})$ est : $\begin{cases} x = t \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$;
2. une représentation paramétrique de l'axe $(O; \overrightarrow{j})$ est : $\begin{cases} x = 0 \\ y = t \\ z = 0 \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$;
3. une représentation paramétrique de l'axe $(O; \overrightarrow{k})$ est : $\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = t \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$.

Exercice 2

La droite passe par le point $A(3; -2; 1)$. Il suffit de prendre $t = 0$.

Un vecteur directeur de cette droite est $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 3

La relation $\overrightarrow{BM} = t\overrightarrow{u}$ s'écrit :

$$\begin{cases} x - (-1) = t \\ y - 2 = 2t \\ z - 3 = -t \end{cases} \text{ avec } t \in \mathbb{R}, \text{ ou encore, } \begin{cases} x = t - 1 \\ y = 2t + 2 \\ z = -t + 3 \end{cases} \text{ avec } t \in \mathbb{R}$$

Exercice 4

Méthode : position relative de deux droites de l'espace

Pour étudier la position relative de deux droites, on commence par étudier la colinéarité de leur vecteur directeur.

• S'ils sont colinéaires, les droites sont soient strictement parallèles soient confondues (pour le savoir, on teste avec un point) ;
• S'ils ne sont pas colinéaires, les droites sont soient sécantes, soient non coplanaires. Pour le savoir on cherche un éventuel point d'intersection en résolvant un système.

Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont des vecteurs directeurs des droites (AB) et $CD)$.
On a $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}-1\\-1\\3\end{pmatrix}$.
Donc les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ ne sont pas colinéaires.
Ainsi les droites (AB) et (CD) sont soit sécantes, soit non coplanaires.

De plus, $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} = -1\times(-1)+0\times(-1)+1\times 3 = 4 \neq 0$.
Donc les droites (AB) et (CD) ne sont pas orthogonales.

La droite (AB) est représentée paramétriquement par :

$$\begin{cases} x = -t+1 \\ y = -1 \\ z = t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

La droite (CD) est, elle, représentée paramétriquement par :

$$\begin{cases} x = -t'+3 \\ y = -t'-2 \\ z = 3t' \end{cases}, t^{'} \in \mathbb{R}.$$

Pour déterminer les coordonnées du point d'intersection éventuel de ces droites, on résout le système :

$$\begin{cases} x = -t+1 = -t'+3 \\ y = -1 = -t'-2 \\ z = t = 3t' \end{cases}, t \in \mathbb{R} \text{ et } t^{'} \in \mathbb{R}.$$

La deuxième équation nous donne $t' = -1$, puis la troisième équation donne $t = -3$.
Ces deux valeurs sont compatibles avec la première équation.

Ainsi nous pouvons affirmer deux choses :
- Le système a un unique couple solution, donc les droites ont une intersection non vide, elles sont donc coplanaires.
- Le système admet une unique solution qui est le couple $(t;t') = (-3;-1)$, donc les droites sont sécantes en un point A.
  En remplaçant par $t = -3$ dans le premier système, on trouve les coordonnées du point $A(4;-1;-3)$.

Exercice 5

a. La droite d admet donc comme représentation paramétrique : $\begin{cases} x = -3 + 2t \\ y = 2 - t \\ z = 4 - 4t \end{cases}$ avec $t \in \mathbb{R}$.

b. Deux méthodes sont possibles :

Méthode 1 :

On cherche la valeur de t telle que les coordonnées du point B vérifient la représentation paramétrique de d.

La $1^{\text{ère}}$ équation $x_B = -3 + 2t$ donne $t = \dfrac{x_B + 3}{2} = 3$.

On regarde maintenant si dans les autres équations, en remplaçant t par t si on obtient les deux autres coordonnées du point B.

On $2 - 3 = -1 = y_B$ et $4 - 4 \times 3 = -8 = z_B$.

Le point B appartient bien à la droite d.

Méthode 2 :

On établit la colinéarité des vecteurs $\vec{u}$ et $\overrightarrow{AB}$.

$\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ -12 \end{pmatrix}$.

On constate que $\overrightarrow{AB} = 3\vec{u}$ donc $B \in d$.

Exercice 6

Deux méthodes sont possibles :

1ère méthode :

Méthode

Dans le cas où le plan (P) est défini par un point A et un vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$:

- Ecrire l'équation cartésienne de (P) sous la forme $ax + by + cz + d = 0$ où le réel d est à déterminer.
- Déterminer d en utilisant les coordonnées du point A.

Une équation cartésienne du plan $\mathscr{P}$ est de la forme $ax + by + cz + d = 0$.

- On commence par déterminer les réels a, b et c à l'aide du vecteur normal $\vec{n}$:
  On obtient ainsi $2x - y + z + d = 0$.

- On retrouve alors le réel d en exprimant l'appartenance du point A au plan $\mathscr{P}$:
  $$\begin{aligned} \mathrm{A} \in \mathscr{P} &\iff 2x_{\mathrm{A}} - y_{\mathrm{A}} + z_{\mathrm{A}} + d = 0 \\ &\iff 2 \times (-1) - 3 + 2 + d = 0 \\ &\iff d = 3 \end{aligned}$$
  On obtient ainsi une équation cartésienne du plan $\mathscr{P}$: $2x - y + z + 3 = 0$.

2nde méthode :

Soit $M(x\,;y\,;z)$ un point du $\mathscr{P}$. Ainsi $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix} x+1 \\ y-3 \\ z-2 \end{pmatrix}$.

$$\begin{aligned} M\in\mathscr{P} &\iff \overrightarrow{AM}\cdot\vec{n}=0 \\ &\iff (x+1)\times 2+(y-3)\times(-1)+(z-2)\times 1=0 \\ &\iff 2x-y+z+3=0 \end{aligned}$$

On obtient ainsi directement une équation cartésienne de d.

A savoir

Le plan $\mathscr{P}$ passant par A et de vecteur normal $\vec{n}$ est l'ensemble des points M de l'espace tels que $\overrightarrow{AM}\cdot\vec{n}=0$.

Exercice 7

1. Un vecteur normal au plan $\mathcal{P}$ est $\vec{n}\begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}$ et on a aussi un vecteur normal au plan $\mathcal{R}$ qui est $\vec{n'}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

Les coordonnées de ces deux vecteurs ne sont pas proportionnelles donc ils ne sont pas colinéaires.

Les plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{R}$ sont donc sécants.

2. Un point $M(x\ ;\ y\ ;\ z)$ appartient à la droite $\mathcal{D}$, si et seulement si, ses coordonnées sont solutions du système :

$$\begin{cases} x-4y+7=0 \\ x+2y-z+1=0 \end{cases}$$

Intersection

Un point appartient à la fois au le plan $\mathcal{P}$ et au plan $\mathcal{R}$ si et seulement si ses coordonnées vérifient simultanément les deux équations cartésiennes.

Prenons, par exemple, $y=0$; il vient alors $x=-7$ et $z=-6$.

Méthode

On a deux équations pour trois inconnues. En prenant $y=0$, on trouve le point de la droite dont l'ordonnée est nulle. On pouvait choisir une autre valeur pour y ou pour x ou z. Une droite possède une infinité de points !

On vient de trouver un point A de coordonnées $(-7\ ;\ 0\ ;\ -6)$ qui appartient à la droite $\mathcal{D}$.

Soit $\vec{u}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ un vecteur directeur de la droite $\mathcal{D}$.

On a donc $\vec{u}\cdot\vec{n}=0$ et $\vec{u}\cdot\vec{n'}=0$, qui se traduit par :

d'une part $a-4b=0$ et d'autre part $a+2b-c=0$.
Prenons, par exemple, $a=4$, alors $b=1$ et donc $c=6$.

C'est pourquoi le vecteur $\vec{u}$ de coordonnées $\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de la droite $\mathcal{D}$.

eh oui

La droite se situe dans chacun des deux plans, son vecteur directeur est orthogonal à chacun des vecteurs normaux de ces plans.

Méthode

C'est la même méthode que précédemment. Deux équations pour trois inconnues. On demande un vecteur directeur. On fixe alors une valeur d'une inconnues et on trouve les autres.

3. On a $\overrightarrow{n}.\overrightarrow{n'} = 1 \times 1 + (-4) \times 2 + 0 \times (-1) = -7 \neq 0$.
Donc les vecteurs $\overrightarrow{n}$ et $\overrightarrow{n'}$ ne sont pas orthogonaux.
Ainsi les plans ne sont pas perpendiculaires.

> **Méthode**
> Pour savoir si les plans sont perpendiculaires, on teste l'orthogonalité de leurs vecteurs directeurs à l'aide du produit scalaire.

Exercice 8

1. $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ est un vecteur normal du plan $\mathcal{P}$ et $\overrightarrow{n'}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ est un vecteur normal du plan $\mathcal{Q}$.
Ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires.
Ainsi, les plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ sont sécants et définissent donc une droite.
En outre $\overrightarrow{n}.\overrightarrow{n'} = 2 \times 1 + 1 \times 1 + (-1) \times 0 = 3 \neq 0$.
Donc les plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ ne sont pas perpendiculaires ; ils sont "simplement" sécants.

2. Il suffit de trouver un points dont les coordonnées vérifient simultanément les équations cartésiennes des plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ c'est-à-dire le système :

$$\begin{cases} 2x + y - z - 2 = 0 \\ x + y - 1 = 0 \end{cases}$$

En prenant $y = 0$, on obtient $x = 1$ et $z = 0$. Ainsi le point $A(1\ ;\ 0\ ;\ 0)$ est sur la droite d'intersection des deux plans.

Exercice 9

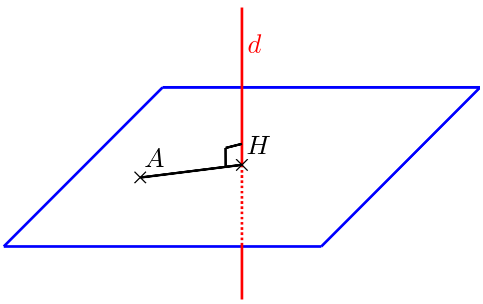
1. On définit le plan $\mathscr{P}$ passant par le point A et orthogonal à la droite (d).

Le vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ de la droite (d) est un vecteur normal à $\mathscr{P}$.

Le plan $\mathscr{P}$ admet alors une équation cartésienne de la forme $2x - y + 2z + d = 0$.
Les coordonnées de A vérifient cette équation, ainsi : $2 \times 3 - 52 \times 4 + d = 0$ soit $d = -9$.
D'où :

$$\mathscr{P} : 2x - y + 2z - 9 = 0.$$

> **Conseil**
> Faites un petit dessin pour visualiser la situation.

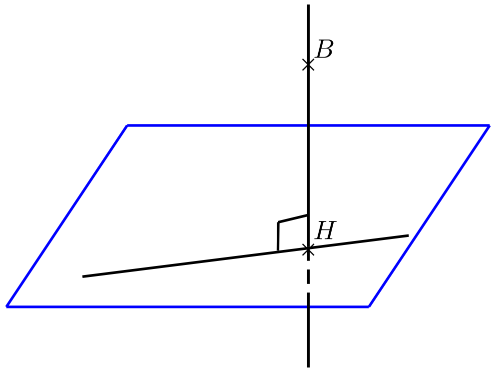


Le point H est à l'intersection du plan et de la droite. Ses coordonnées vérifient le système :

$$\begin{cases} 2x - y + 2z - 9 & = & 0 \\ x & = & 1 + 2t \\ y & = & -3 - t \\ z & = & t \end{cases}$$

Le paramètre t vérifie donc l'équation $2 \times (1 + 2t) - (-3 - t) + 2 \times (20 + 2t) - 9 = 0$.
On trouve $t = -4$.
En remplaçant t par -4 dans les équations on trouve : $x = -7$, $y = 1$ et $z = 12$.
Les coordonnées de H sont $(-7\ ;\ 1\ ;\ 12)$.

2. On définit la droite (d') passant par B et orthogonale au plan $\mathscr{P}$. Le vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix}4\\1\\-2\end{pmatrix}$ au plan $\mathscr{P}$ est un vecteur directeur de (d').



La droite (d') admet pour représentation paramétrique :

$$\left\{\begin{array}{lll} x & = & -1 + 4t \\ y & = & 3 + t \\ z & = & -2 - 2t \end{array}\right. \qquad t \in \mathbb{R}$$

Le point K est à l'intersection de (d') et de $\mathscr{P}$. Ses coordonnées vérifient donc :

$$\left\{\begin{array}{lll} 4x + y - 2z - 66 & = & 0 \\ x & = & -1 + 4t \\ y & = & 3 + t \\ z & = & -2 - 2t \end{array}\right.$$

Le paramètre t vérifie donc l'équation : $\times(-1 - 4t) + (3 + t) - 2 \times (-2 - 2t) - 66 = 0$. On trouve $t = 3$.

En remplaçant t par 3 dans les équations, on trouve $x = 11$, $y = 6$ et $z = -8$.

Les coordonnées du point K sont $(11\ ;\ 6\ ;\ -8)$.