MATHEMATIQUES
Intégration : entraînement 3 (corrigé)

Exercice 1
Partie A :

1. $I_n = \displaystyle\int_0^n f(x)\,\mathrm{d}x$ donc, pour tout n de $\mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} I_{n+1} - I_n &= \int_0^{n+1} f(x)\,\mathrm{d}x - \int_0^n f(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \int_0^{n+1} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_n^0 f(x)\,\mathrm{d}x \quad \text{Car } \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x. \\ &= \int_n^0 f(x)\,\mathrm{d}x + \int_0^{n+1} f(x)\,\mathrm{d}x \quad \text{Vous voyez la relation de Chasles ?} \\ &= \int_n^{n+1} f(x)\,\mathrm{d}x \end{aligned}$$

On admet dans le texte que la fonction f est positive sur $[0\,;\,+\infty[$ donc sur $[n\,;\,n+1]$; on peut en déduire que $\displaystyle\int_n^{n+1} f(x)\,\mathrm{d}x > 0$ et donc que $I_{n+1} - I_n > 0$ pour tout n entier naturel n.
La suite (I_n) est donc croissante.

2. a. Sur $[0\ ;\ +\infty[$, on sait que $\mathrm{e}^x - x \geqslant \dfrac{\mathrm{e}^x}{2}$; de plus, pour tout x, $\dfrac{\mathrm{e}^x}{2} > 0$.

Comme la fonction inverse est strictement décroissante sur $]0\ ;\ +\infty[$, on a :

L'idée
L'idée est de "fabriquer" $f(x)$ par inégalités successives pour passer à l'intégrale ensuite et avoir la relation demandée.

$$\frac{1}{\mathrm{e}^x - x} \leqslant \frac{2}{\mathrm{e}^x}$$

On multiplie cette inégalité par $x \geqslant 0$ donc : $\dfrac{x}{\mathrm{e}^x - x} \leqslant \dfrac{2x}{\mathrm{e}^x}$

D'après la conservation de l'ordre de l'intégrale $\displaystyle\int_0^n \frac{x}{\mathrm{e}^x - x}\,\mathrm{d}x \leqslant \int_0^n \frac{2x}{\mathrm{e}^x}\,\mathrm{d}x$.

Ainsi :

$$I_n \leqslant \int_0^n 2x\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$$

b. La fonction H est dérivable sur $[0\ ;\ +\infty[$ comme produit de fonctions dérivables et :

$$H'(x) = \underbrace{-1}_{u'(x)} \times \underbrace{\mathrm{e}^{-x}}_{v(x)} + \underbrace{(-x-1)}_{u(x)}\underbrace{(-1)\mathrm{e}^{-x}}_{v'(x)} = -\mathrm{e}^{-x} + x\mathrm{e}^{-x} + \mathrm{e}^{-x} = x\mathrm{e}^{-x}$$

c. On déduit de la question précédente qu'une primitive de $x \longmapsto x\mathrm{e}^{-x}$ est $x \longmapsto H(x) = (-x-1)\mathrm{e}^{-x}$ et ainsi qu'une primitive de $x \longmapsto 2x\mathrm{e}^{-x}$ est $x \longmapsto 2H(x) = 2(-x-1)\mathrm{e}^{-x}$

Donc $\displaystyle\int_0^n 2x\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = \Big[2(-x-1)\mathrm{e}^{-x}\Big]_0^n = 2(-n-1)\mathrm{e}^{-n} - \left[2(-1)\mathrm{e}^0\right] = 2 - 2(n+1)\mathrm{e}^{-n}$

Pour tout x, $\mathrm{e}^x > 0$ donc $2(n+1)\mathrm{e}^{-n} > 0$ donc $2 - 2(n+1)\mathrm{e}^{-n} \leqslant 2$

$$\left.\begin{array}{l} I_n \leqslant \displaystyle\int_0^n 2x\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x \\ \displaystyle\int_0^n 2x\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x \leqslant 2 \end{array}\right\} \Longrightarrow I_n \leqslant 2$$

3. La suite (I_n) est croissante et majorée par 2 donc, d'après le théorème de la convergence monotone, la suite (I_n) est convergente.

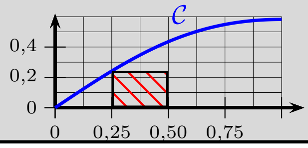
Partie B

1. On fait fonctionner l'algorithme pour $K = 4$ donc pour $h = \frac{1}{4} = 0,25$:

i	A	x
1	0	0,25
2	0,060	0,5
3	0,169	0,75
4	0,306	1

Explications

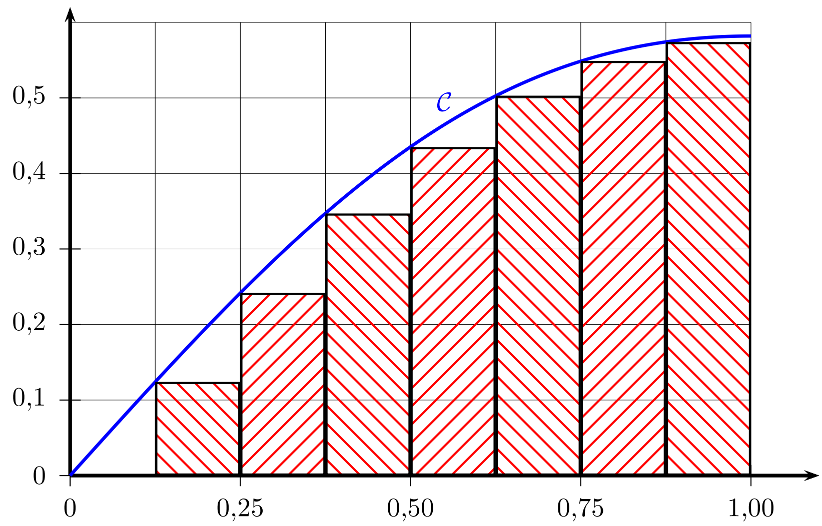
A chaque fois x augmente de 0,25.
On calcule la première valeur de A :
$0 + 0,25 \times f(0) = 0$ car $f(0) = 0$.
Ce nombre est l'aire du premier rectangle (largeur 0,25 et hauteur 0).
On calcule la deuxième valeur de A :
$0 + 0,25 \times f(0,25) \simeq 0,060$.
Ce nombre est la somme des aires du premier rectangle (soit 0) et l'aire du rectangle de largeur 0,25 et de longueur $f(0,25)$.



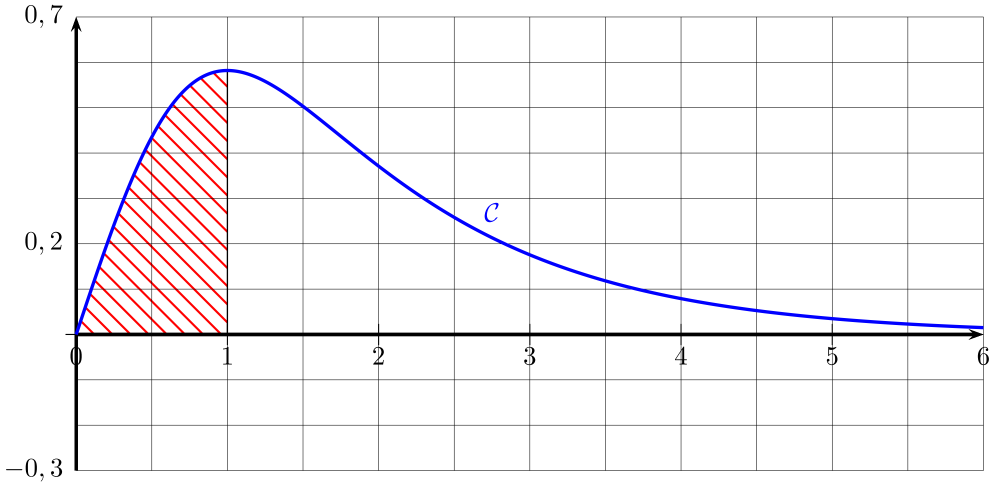
2. Pour $K = 8$, l'algorithme donne la somme des aires des rectangles hachurés sur le graphique ci-dessous.

3. Quand K devient grand, l'algorithme donne une valeur approchée par défaut de l'aire du domaine compris entre la courbe $\mathcal{C}$, l'axe des abscisses, et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$ (voir le graphique).

Courbe $\mathcal{C}$, représentative de la fonction f sur $[0 ; 1]$



Courbe $\mathcal{C}$, représentative de la fonction f sur $[0 ; 6]$

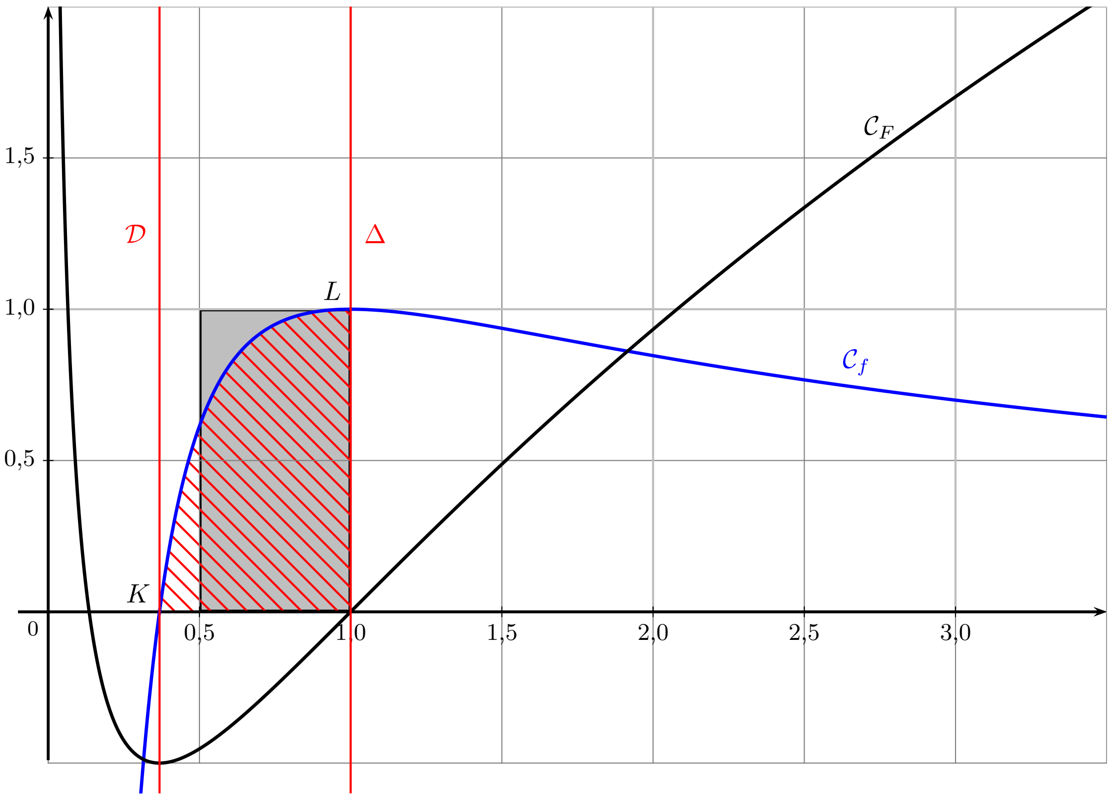


Exercice 2

1. Comme F est une primitive de f, alors f est la dérivée de F donc les variations de F sont données par le signe de f : F est croissante si et seulement f est positive.

C'est donc dans la situation 2 que la courbe C_F est la courbe représentative d'une primitive F de la fonction f.

2. a. Représentation graphique :



L'aire du domaine du plan délimité par les droites $\mathcal{D}$ et Δ, par la courbe $\mathcal{C}_f$ et par l'axe des abscisses a une valeur approchée de 0,5 (aire du rectangle coloré en gris sur le graphique).

Autrement

L'abscisse du point K est environ 0,4 et l'abscisse du point L est 1. Une valeur approchée de l'aire est donc donnée par :
$F(1) - F(0,4) \simeq 0 - (-0,5) = 0,5$ u.a.

b. Recherche de la valeur exacte de l'aire.

— K le point d'intersection de la courbe $\mathcal{C}_f$ et de l'axe des abscisses et $\mathcal{D}$ la droite passant par K et parallèle à l'axe des ordonnées.

Explications

Comme la fonction f est positive sur le domaine considéré (en tout cas graphiquement), l'aire est donnée par : $\displaystyle\int_{x_K}^{x_L} f(x)\,\mathrm{d}x$. On recherche les valeurs exactes des abscisses des points K et L, puis on détermine une primitive de la fonction pour calculer ensuite l'intégrale. Et voilà !

Ce point K a pour abscisse la solution de l'équation $f(x) = 0$. On résout cette équation dans $]0\ ;\ +\infty[$:

$$\begin{array}{rcl} \dfrac{1}{x}(1+\ln x) & = & 0 \quad \text{On reconnaît une équation produit nul.} \\ \dfrac{1}{x}=0 & & \ln x + 1 = 0 \\ \text{Pas de solution} & \text{ou} & \ln x = -1 \\ & & \ln x = \ln \mathrm{e}^{-1} \\ & & x = \mathrm{e}^{-1} \end{array}$$

Le point K a pour coordonnées $(\mathrm{e}^{-1}\ ;\ 0)$.

— L le point d'intersection de $\mathcal{C}_F$ et de l'axe des abscisses, ayant une abscisse supérieure à $\dfrac{1}{2}$ et Δ la droite passant par L et parallèle à l'axe des ordonnées.

L'abscisse du point L est l'abscisse du point en lequel la fonction f atteint son maximum, nombre pour lequel la dérivée de f s'annule et passe du négatif au positif.

f est sous la forme d'un quotient :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{\overbrace{\frac{1}{x}}^{u'(x)} \times \overbrace{x}^{v(x)} - \overbrace{(1+\ln x)}^{u(x)} \times \overbrace{1}^{v'(x)}}{\underbrace{x^2}_{(v(x)^2)}} \\ &= -\frac{\ln x}{x^2} \end{aligned}$$

x	0		1		$+\infty$
$-\ln x$	$\|$	$+$	0	$-$	
x^2	$\|$	$+$	0	$+$	
$f'(x)$	$\|$	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$\|$	$\nearrow$		$\searrow$	

Donc la fonction f admet un maximum pour $x=1$ et le point L a pour abscisse 1.

La fonction f est positive sur $\left[\mathrm{e}^{-1}\,;\,1\right]$, donc l'aire du domaine hachuré est $\displaystyle\int_{\mathrm{e}^{-1}}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x$, c'est-à-dire $F(1) - F\left(\mathrm{e}^{-1}\right)$.

Pour avoir la valeur exacte de l'aire, il faut déterminer une primitive de f.

$f(x) = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x} \times \ln x$

- La fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ a pour primitive sur $]0\,;\,\infty[$ la fonction $x \mapsto \ln x$.
- La fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x} \times \ln x$ est de la forme $u'u$, où $u(x) = \ln x$, donc a pour primitive $\dfrac{u^2}{2}$ soit la fonction $x \mapsto \dfrac{(\ln x)^2}{2}$.
- Donc la fonction f a pour primitive $x \mapsto \ln x + \dfrac{(\ln x)^2}{2}$.

$$\int_{\mathrm{e}^{-1}}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x = \left[\ln x + \frac{(\ln x)^2}{2}\right]_{\mathrm{e}^{-1}}^{1} = \left(\ln 1 + \frac{(\ln 1)^2}{2}\right) - \left(\ln \mathrm{e}^{-1} + \frac{(\ln \mathrm{e}^{-1})^2}{2}\right)$$

$\ln 1 = 0$ et $\ln \mathrm{e}^{-1} = -1$ donc $\displaystyle\int_{\mathrm{e}^{-1}}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x = 0 - \left(-1 + \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$

Exercice 3

1. a. Soit F la fonction définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par $F(x)=x\ln x - x$. F est dérivable comme somme et produit de fonctions dérivables.

Pour tout x de $]0\ ;\ +\infty[$, $F'(x)=1\times\ln x + x\times\ln x - 1 = \ln x = f(x)$; par conséquent $F'=f$ donc F est une primitive de f sur $]0\ ;\ +\infty[$.

On en déduit que : $I=\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} f(x)\ \mathrm{d}x = F(\mathrm{e})-F(1)=(\mathrm{e}\ln\mathrm{e}-\mathrm{e})-(1\ln 1 - 1)=0-(-1)=1.$

$$\boxed{I=1}$$

b. $J=\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}}(\ln x)^2\ \mathrm{d}x.$

En posant $u(x)=(\ln x)^2$ et $v'(x)=1$, on a $J=\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} u(x)v'(x)\ \mathrm{d}x.$

u, v, u' et v' sont continues, donc on peut effectuer une intégration par parties.

On a : $u'(x)=2\dfrac{\ln x}{x}$ et $v(x)=x$

$$\begin{aligned}
J &= [u(x)v(x)]_{1^{\mathrm{e}}} - \int_1^{\mathrm{e}} u'(x)v(x)\ \mathrm{d}x\\
&= \left[x(\ln x)^2\right]_1^{\mathrm{e}} - \int_1^{\mathrm{e}} 2\frac{\ln x}{x}\times x\ \mathrm{d}x\\
&= \mathrm{e}-2\int_1^{\mathrm{e}}\ln x\ \mathrm{d}x\\
&= \mathrm{e}-2I
\end{aligned}$$

$$\boxed{J=\mathrm{e}-2I}$$

Autrement

On pouvait trouver J directement, en effectuant un autre choix de fonctions pour une intégration par parties :

$J=\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}}\ln x\times\ln x\ \mathrm{d}x=\int_1^{\mathrm{e}} f(x)F'(x)\ \mathrm{d}x$

$=\displaystyle[f(x)F(x)]_1^{\mathrm{e}}-\int_1^{\mathrm{e}} f'(x)F(x)\ \mathrm{d}x$

$=\displaystyle f(\mathrm{e})F(\mathrm{e})-f(1)F(1)-\int_1^{\mathrm{e}}(\ln x-1)\ \mathrm{d}x$

$=\displaystyle-\int_1^{\mathrm{e}}(\ln x-1)\ \mathrm{d}x=-\int_1^{\mathrm{e}}\ln x\ \mathrm{d}x+\int_1^{\mathrm{e}}\ \mathrm{d}x$

$=-I+(\mathrm{e}-1)=\mathrm{e}-2$

c. Puisque $I=1$, on obtient :

$$\boxed{J=\mathrm{e}-2}$$

d. Pour tout x de $[1\ ;\ \mathrm{e}]$, $0\leqslant\ln x\leqslant 1$ donc $0\leqslant(\ln x)^2\leqslant\ln x$ donc $g(x)\leqslant f(x)$.

Par conséquent : $\mathcal{A}=\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}}[f(x)-g(x)]\ \mathrm{d}x=\int_1^{\mathrm{e}} f(x)\ \mathrm{d}x-\int_1^{\mathrm{e}} g(x)\ \mathrm{d}x = I-J=3-\mathrm{e}.$

$$\boxed{\mathcal{A}=3-\mathrm{e}}$$

2. On a : $MN=\ln x-(\ln x)^2$. Posons $h(x)=\ln x-(\ln x)^2$.

h est dérivable : pour tout x de $[1\ ;\ \mathrm{e}]$, $h'(x)=\dfrac{1}{x}-2\dfrac{\ln x}{x}=\dfrac{1-2\ln x}{x}.$

$h'(x)=0\iff\ln x=\dfrac{1}{2}\iff x=\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}=\sqrt{\mathrm{e}}.$

Puisque x est positif, $h'(x)$ est du signe de $1-2\ln x$.

$$\begin{array}{rcl} 1-2\ln x & > & 0 \\ \ln x & < & \dfrac{1}{2} \\ x & < & \mathrm{e}^{\frac{1}{2}} \\ x & < & \sqrt{\mathrm{e}} \end{array}$$

Méthode

Pour étudier le signe de $1-2\ln x$, on résout l'inéquation $1-2\ln x > 0$. On aurait pu choisir $1-2\ln x < 0$.

On en déduit le tableau de variations de h :

x	1		$\sqrt{\mathrm{e}}$		e
$h'(x)$		$+$	0	$-$	
$h(x)$		$\nearrow$	$h(\sqrt{\mathrm{e}})$	$\searrow$	

Par conséquent, $h(x)$ a un maximum pour $x=\sqrt{\mathrm{e}}$.

$h(\sqrt{\mathrm{e}})\ln(\sqrt{\mathrm{e}})-(\ln(\sqrt{\mathrm{e}}))^2=\dfrac{1}{2}-\left(\dfrac{1}{2}\right)^2=\dfrac{1}{4}$.

MN est maximum pour $x=\sqrt{\mathrm{e}}$ et vaut alors $\dfrac{1}{4}$.