MATHEMATIQUES
Intégration : entraînement savoir-faire 1 (corrigé)

Exercice 1

1. a. f est la fonction définie sur $[2\,;\,5]$ par : $f(x) = 4$.

$$\int_2^5 f(x)\ \mathrm{d}x = \int_2^5 4\ \mathrm{d}x = \mathscr{A}_{\text{rectangle}} = 3 \times 4 = 12\,u.a.$$

b. g est la fonction définie sur $[2\,;\,4]$ par : $g(x) = 2x - 4$.

$$\int_2^4 g(x)\mathrm{d}x = \int_2^4 (2x-4)\mathrm{d}x = \mathscr{A}_{\text{triangle}} = \frac{4 \times 2}{2} = 4\ u.a.$$

2. a. Aire du trapèze.

$$\int_{-2}^4 h(x)\mathrm{d}x = \int_{-2}^4 \left(-\frac{1}{3}x + \frac{7}{3}\right)\mathrm{d}x$$
$$= \mathscr{A}_{\text{trapèze}} = \frac{3+1}{2} \times 6 = 12\,u.a.$$

Autrement

On pouvait aussi décomposer le trapèze en deux triangles pour calculer son aire.
Aire d'un trapèze : $\dfrac{(b+B) \times h}{2}$.

b. Aire du demi-disque.

$$\int_{-3}^3 k(x)\mathrm{d}x = \int_{-3}^3 \sqrt{9-x^2}\ \mathrm{d}x$$
$$= \mathscr{A}_{\text{demi-disque}} = \frac{\pi \times 3^2}{2} = 4,5\pi \simeq 14u.a.$$

Formule

L'aire d'un disque de rayon r est : $\pi \times r^2$. Donc, un demi-disque....

Exercice 2

1. $A = \displaystyle\int_0^3 (x+4)\ \mathrm{d}x$.

Méthode

On calcule d'abord une primitive de la fonction f.

On pose $f(x) = x + 4$. Une primitive F de f est définie par $F(x) = \dfrac{x^2}{2} + 4x$.

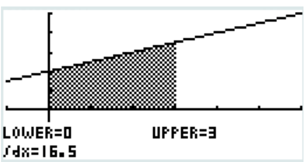
- $F(3) = \dfrac{3^2}{2} + 4 \times 3 = \dfrac{9}{2} + 12 = 16,5$.
- $F(0) = \dfrac{0^2}{2} + 4 \times 0 = 0$.

Conseil

Faites ces deux calculs séparés. C'est plus prudent.

Ainsi, $A = \displaystyle\int_0^3 (x+4)\ \mathrm{d}x = F(3) - F(0) = 16,5$.

La fonction f étant positive sur $[0\ ;\ 3]$, l'intégrale est l'aire entre la droite représentant la fonction f, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = 0$ et $x = 3$. Cette surface est donc égale à 16,5 u.a.



Calculatrice

On représente la fonction f en utilisant le menu Graph. On paramètre la fenêtre d'affichage via F3 avec $X_{Min} = -1$, $X_{Max} = 6$, $X_{Scale} = 1$ $Y_{Min} = -5$, $Y_{Max} = 10$ et $Y_{Scale} = 2$.
Avec le solveur graphique Gsolv F3, puis ▷ puis ∫dx, en tapant 0 (Lower Bound) puis EXE puis 3 (Upper Bound) et encore EXE, on obtient la valeur de cette intégrale, ainsi que son interprétation graphique.

Calculatrice

Avec le menu RUN-MAT, puis OPTN, puis CALC, puis ∫dx, on entre les bornes et la fonction et on obtient la valeur de l'intégrale.

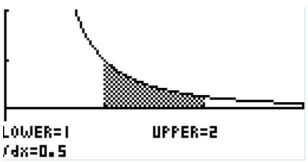
2. $B = \displaystyle\int_1^2 \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x$.

$f(x) = \dfrac{1}{x^2} = -\underbrace{\dfrac{-1}{x^2}}_{\text{Dérivée de } x \longmapsto \frac{1}{x}}$. Ainsi une primitive F de f est définie par $F(x) = -\dfrac{1}{x}$.

- $F(2) = -\dfrac{1}{2} = -0,5$.
- $F(1) = -\dfrac{1}{1} = -1$.

$B = \displaystyle\int_1^2 \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x = F(2) - F(1) = -0,5 - (-1) = -0,5 + 1 = 0,5$.

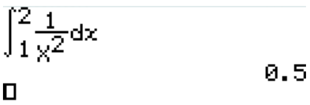
La fonction f étant positive sur $[1~;~2]$, l'intégrale est l'aire entre la courbe représentant la fonction f, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = 1$ et $x = 2$. Cette surface est donc égale à 0,5 u.a.



Calculatrice

On représente la fonction f en utilisant le menu Graph. On paramètre la fenêtre d'affichage via V-Window F3 avec $X_{Min} = 0$, $X_{Max} = 3$, $X_{Scale} = 1$ $Y_{Min} = -1$, $Y_{Max} = 2$ et $Y_{Scale} = 1$.

Avec le solveur graphique Gsolv F3, puis ▷ puis ∫dx, en tapant 1 (Lower Bound) puis EXE puis 2 (Upper Bound) et encore EXE, on obtient la valeur de cette intégrale, ainsi que son interprétation graphique.



Calculatrice

Avec le menu RUN-MAT, puis OPTN, puis CALC, puis ∫dx, on entre les bornes et la fonction et on obtient la valeur de l'intégrale.

3. $C = \displaystyle\int_{-1}^3 x^2 + 1\,\mathrm{d}x$.

On pose $f(x) = x^2 + 1$. Une primitive F de f est définie par $F(x) = \dfrac{x^3}{3} + x$.

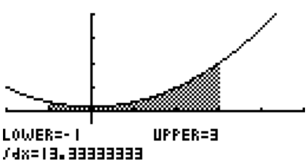
- $F(3) = \dfrac{3^3}{3} + 3 = 12$.
- $F(-1) = \dfrac{(-1)^3}{3} - 1 = \dfrac{-1}{3} - 1 = \dfrac{-1}{3} - \dfrac{3}{3} = -\dfrac{4}{3}$.

Courage

Un petit calcul de fractions, ça maintient la forme !

$C = \displaystyle\int_{-1}^3 x^2 + 1\,\mathrm{d}x = F(3) - F(-1) = 12 - \left(-\frac{4}{3}\right) = 12 + \frac{4}{3} = \frac{36}{3} + \frac{4}{3} = \frac{40}{3} \simeq 13,33$.

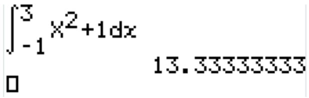
La fonction f étant positive sur $[1~;~2]$, l'intégrale est l'aire entre la courbe représentant la fonction f, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = 1$ et $x = 2$. Cette surface est donc égale à 0,5 u.a.



Calculatrice

On représente la fonction f en utilisant le menu Graph. On paramètre la fenêtre d'affichage via V-Window F3 avec $X_{Min} = 2$, $X_{Max} = 5$, $X_{Scale} = 1$ $Y_{Min} = -10$, $Y_{Max} = 20$ et $Y_{Scale} = 5$.

Avec le solveur graphique Gsolv F3, puis ▷ puis ∫dx, en tapant -1 (Lower Bound) puis EXE puis 3 (Upper Bound) et encore EXE, on obtient la valeur de cette intégrale, ainsi que son interprétation graphique.



Calculatrice

Avec le menu , puis , puis , puis , on entre les bornes et la fonction et on obtient la valeur de l'intégrale.

Exercice 3

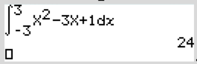
1. $A = \displaystyle\int_{-3}^{3} \left(x^2 - 3x + 1\right)\, \mathrm{d}x$

On pose $f(x) = x^2 - 3x + 1$. Une primitive F de f est définie par : $F(x) = \dfrac{x^3}{3} - 3 \times \dfrac{x^2}{2} + x = \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{3x^2}{2} + x$.

- $F(3) = \dfrac{3^3}{3} - \dfrac{3 \times 3^2}{2} + 3 = 9 - 13,5 + 3 = -1,5.$
- $F(-3) = \dfrac{(-3)^3}{3} - \dfrac{3 \times (-3)^2}{2} - 3 = -9 - 13,5 - 3 = -25,5.$

$A = \displaystyle\int_{-3}^{3} \left(x^2 - 3x + 1\right)\, \mathrm{d}x = F(3) - F(-3) = -1,5 - (-25,5) = 24.$

Calculatrice

Avec la calculatrice, c'est plus rapide : 
.

2. $B = \displaystyle\int_2^6 \left(\frac{x^2}{2} - 1\right) \mathrm{d}x$

On pose $f(x) = \dfrac{x^2}{2} - 1 = \dfrac{1}{2}x^2 - 1$.

Une primitive F de f est définie par : $F(x) = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{x^3}{3} - x = \dfrac{x^3}{6} - x$.

Conseil

J'ai transformé l'écriture de $f(x)$ pour simplifier le calcul d'une primitive.

- $F(6) = \dfrac{6^3}{6} - 6 = 30$.
- $F(2) = \dfrac{2^3}{6} - 2 = \dfrac{8}{6} - \dfrac{12}{6} = -\dfrac{2}{3}$.

$B = \displaystyle\int_2^6 \left(\frac{x^2}{2} - 1\right) \mathrm{d}x = F(6) - F(2) = 30 - \left(-\frac{2}{3}\right) = \frac{92}{3} \simeq 30,67$.

Calculatrice

N'hésitez pas à prendre votre calculatrice pour faire ces petits calculs de fractions. Avec la calculatrice :

3. $C = \displaystyle\int_{-2}^1 2\mathrm{e}^{2x+1} \,\mathrm{d}x$

On pose $f(x) = \underbrace{2}_{u'(x)} \underbrace{\mathrm{e}^{2x+1}}_{\mathrm{e}^{u(x)}}$.

Une primitive F de f est définie par : $F(x) = \mathrm{e}^{2x+1}$.

A reconnaître

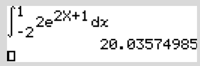
Cette forme $u'\mathrm{e}^u$ est à reconnaître ! Si $f = u'\mathrm{e}^u$, alors $F = \mathrm{e}^u$.

- $F(1) = \mathrm{e}^{2\times 1+1} = \mathrm{e}^3$.
- $F(-2) = \mathrm{e}^{2\times(-2)+1} = \mathrm{e}^{-3}$.

$C = \displaystyle\int_{-2}^1 2\mathrm{e}^{2x+1} \,\mathrm{d}x = F(1) - F(-2) = \mathrm{e}^3 - \mathrm{e}^{-3} \simeq 20,04$.

Calculatrice

Avec la calculatrice :



4. $D = \displaystyle\int_1^2 \frac{1}{x} + 2 \,\mathrm{d}x$

On pose $f(x) = \dfrac{1}{x} + 2$.

Une primitive F de f est définie par : $F(x) = \ln x + 2x$.

N'oubliez pas !

Une primitive de $x \longmapsto \dfrac{1}{x}$ est $x \longmapsto \ln x$.

- $F(2) = \ln 2 + 4$.
- $F(1) = \ln 1 + 2 = 2$.

$D = \displaystyle\int_1^2 \frac{1}{x} + 2 \,\mathrm{d}x = F(2) - F(1) = \ln 2 + 4 - 2 = \ln 2 + 2 \simeq 2,69$.

Calculatrice

Avec la calculatrice :

Exercice 4

- Une primitive de $x \longmapsto -x^2 + 4x - 1$ est $x \longmapsto -\dfrac{1}{3}x^3 + 2x^2 - x$.

  Ainsi,

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^1 (-x^2 + 4x - 1)\,\mathrm{d}x &= \left[-\frac{1}{3}x^3 + 2x^2 - x\right]_{-1}^1 \\
&= \left(-\frac{1^3}{3} + 2 \times 1^2 - 1\right) - \left(-\frac{(-1)^3}{3} + 2 \times (-1\right. \\
&= -\frac{1}{3} + 2 - 1 - \frac{1}{3} - 2 - 1 \\
&= -\frac{2}{3} - 2 \\
&= -\frac{8}{3}
\end{aligned}$$

Présentation

Avec la calculatrice : Voici une autre façon de présenter les calculs.

- Une primitive de $x \longmapsto 2\cos(x) - 3\sin(x)$ est $x \longmapsto 2\sin(x) + 3\cos(x)$.
Ainsi,

$$\begin{aligned}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} 2\cos(x) - 3\sin(x)\ \mathrm{d}x &= [2\sin(x) + 3\cos(x)]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \left(2\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) + 3\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)\right) - \left(2\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) + 3\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) \\ &= 2 - \frac{5}{2}\sqrt{2}\end{aligned}$$

Pensez-y !

Vous pouvez prendre votre calculatrice pour vérification.

- Une primitive de $x \longmapsto \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ est $x \longmapsto \sqrt{x^2+1}$.

Primitive

$f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}} = \dfrac{\overbrace{2x}^{u'(x)}}{\underbrace{2\sqrt{x^2+1}}_{2\sqrt{u(x)}}}$ est de la forme

$f = \dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$ dont une primitive est $\sqrt{u}$.

Ainsi,

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\ \mathrm{d}x &= \left[\frac{1}{2} \times 2\sqrt{x^2+1}\right]_0^1 \\ &= \left[\sqrt{x^2+1}\right]_0^1 \\ &= \sqrt{1^2+1} - \sqrt{0^2+1} \\ &= \sqrt{2} - 1\end{aligned}$$

- Une primitive de $x \longmapsto \dfrac{\ln(x)}{x}$ est $x \longmapsto \dfrac{1}{2} \times (\ln(x)^2)$.

Primitive

$f(x) = \dfrac{\ln(x)}{x} = \underbrace{\dfrac{1}{x}}_{u'(x)} \times \underbrace{\ln x}_{u(x)}$ est de la forme

$f = u' \times u$ dont une primitive est $\dfrac{u^2}{2}$.

Ainsi,

$$\begin{aligned}\int_1^{\mathrm{e}} \frac{\ln(x)}{x}\ \mathrm{d}x &= \left[\frac{1}{2} \times (\ln(x)^2)\right]_1^{\mathrm{e}} \\ &= \frac{1}{2} \times (\ln(\mathrm{e})^2) - \frac{1}{2} \times (\ln(1)^2) \\ &= \frac{1}{2} \times 1^2 - \frac{1}{2} \times 0^2 \\ &= \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

Exercice 5

1. $\displaystyle\int_0^1 te^t dt$ est de la forme $\displaystyle\int_0^1 u(t)v'(t)dt$, avec $u(t) = t$ et $v'(t) = e^t$.
On a alors $u'(t) = 1$ et $v(t) = e^t$. (Les fonctions u et v sont dérivables sur $[0;1]$ et leurs dérivées sont continues sur $[0;1]$.) D'après la formule d'intégration par parties, on obtient :
$\displaystyle\int_0^1 te^t dt = [te^t]_0^1 - \int_0^1 1 \times e^t dt = [te^t]_0^1 - [e^t]_0^1 = e - (e-1) = 1.$

2. On pose $u(x) = x$ et $v'(x) = \sin x$, on a alors $u'(x) = 1$ et $v(x) = -\cos x$.
u et v sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et u' et v' sont continues sur $\mathbb{R}$, donc on obtient :
$\displaystyle\int_0^{\pi} x\sin x dx = [-x\cos x]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} -\cos x dx = -\pi\cos\pi + [\sin x]_0^{\pi} = \pi + \sin\pi - \sin 0 = \pi.$

3. La fonction $F : x \longmapsto \int_1^x \ln t dt$ est la primitive de f qui s'annule en 1.

On utilise alors une intégration par parties de $F(x) = \int_1^x 1 \times \ln t dt$:

On pose $v'(t) = 1$ et $u(t) = \ln t$, on obtient alors : $v(t) = t$ et $u'(t) = \frac{1}{t}$, ce qui donne :

$F(x) = [t \ln t]_1^x - \int_1^x t \times \frac{1}{t} dt = x \ln x - \int_1^x 1 dt = x \ln x - x + 1.$

Ainsi la fonction $F : x \longmapsto x \ln x - x + 1$ et la primitive de f sur $]0; +\infty[$ telle que $F(1) = 0$.

Remarque :

Une autre primitive de $x \longmapsto \ln x$ sur $]0; +\infty[$ est la fonction $x \longmapsto x \ln x - x$.

Exercice 6

1. Pour montrer que f est une primitive de g sur $[0 ; 1]$, on calcule la dérivée de f.
On a pour $t \in [0 ; 1]$, $f(t) = \left[(2-t)\mathrm{e}^t\right]$.

Produit

g est le produit de deux fonctions. On utilise la formule du produit pour dériver. On connaît la fonction que l'on doit obtenir.

$f'(t) = -\mathrm{e}^t + (2-t)\mathrm{e}^t = (1-t)\mathrm{e}^t = g(t)$.
Donc f est bien une primitive de g.

On a donc $u_1 = \int_0^1 (1-t)\mathrm{e}^t \,\mathrm{d}t = \left[(2-t)\mathrm{e}^t\right]_0^1 = \mathrm{e} - 2$.

2. $u_{n+1} = \int_0^1 (1-t)^{n+1}\mathrm{e}^t \,\mathrm{d}t$.

En posant $u(t) = (1-t)^{n+1}$ $\quad v'(t) = \mathrm{e}^t$

$u'(t) = -(n+1)(1-t)^n$ $\quad v = \mathrm{e}^t$

Toutes ces fonctions étant continues et dérivables, en intégrant par parties :

$u_{n+1} = \left[(1-t)^{n+1}\mathrm{e}^t\right]_0^1 + (n+1)\int_0^1 (1-t)^n \mathrm{e}^t \,\mathrm{d}t = -1 + (n+1)u_n.$