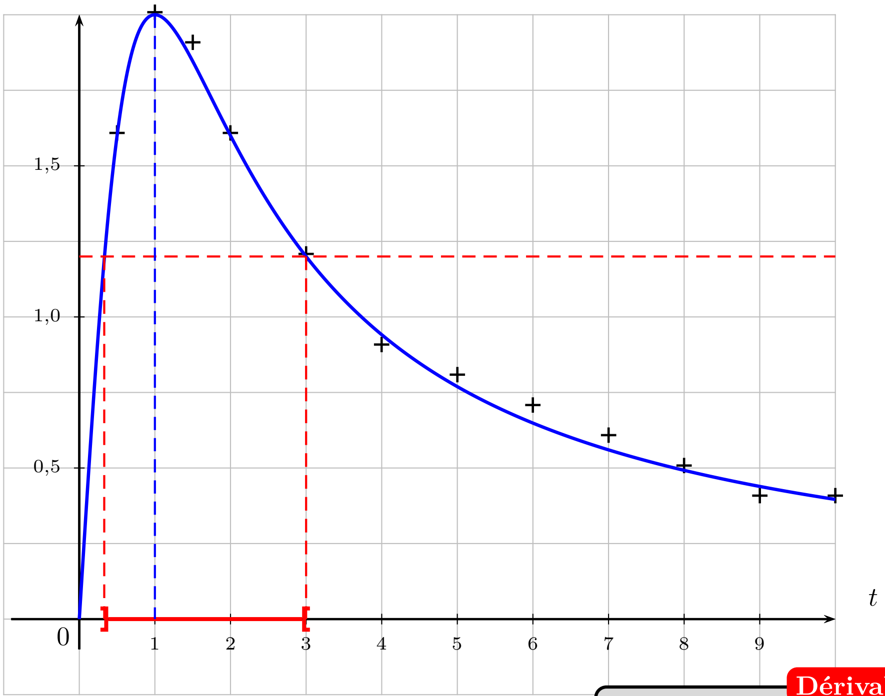
# MATHEMATIQUES
## Limites de fonctions : entraînement 2 (corrigé)

## Exercice 1

1. **a.** la fonction $g$ est strictement croissante sur $[0\,;\,1]$, puis strictement décroissante sur $[1\,;\,+\infty[$ ;
   **b.** la concentration maximale d'antibiotique lors des 10 premières heures est de 2 mg/l et elle est atteinte au bout d'une heure ;
   **c.** l'intervalle de temps pendant lequel la concentration de l'antibiotique dans le sang est supérieure à 1,2 mg/l est à peu près $[0,3\,;\,3]$.




2. **a.** La fonction $g$ est dérivable sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$ et on note sa dérivée est $g'$.

**Dérivabilité**

O$g$ est une fonction rationnelle, elle est donc dérivable sur son ensemble de définition, ici $[0\,;\,+\infty[$.

La fonction $g$ est un quotient de deux fonctions.
On utilise la formule $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$ avec $u(t) = 4t$ et $v(t) = t^2 + 1$.

**Remarque**

$u'(t) = 4$ et $v'(t) = 2t$.

$$\begin{aligned}
g'(t) &= \frac{\overbrace{4}^{u'(t)} \times \overbrace{(t^2+1)}^{v(t)} - \overbrace{4t}^{u(t)} \times \overbrace{(2t)}^{v'(x)}}{\underbrace{(t^2+1)^2}_{(v(t))^2}} \\
&= \frac{4t^2 + 4 - 8t^2}{(t^2+1)^2} \\
&= \frac{-4t^2 + 4}{(t^2+1)^2} \\
&= \frac{4(1-t^2)}{(t^2+1)^2}
\end{aligned}$$

Le polynôme $1-t^2$ admet deux racines $-1$ et $1$, et il est du signe du coefficient de $t^2$ donc négatif à l'extérieur de ces racines. On en déduit le tableau de variations suivant :

| $t$ | $0$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $4$ | | $+$ | | $+$ | |
| $1-t^2$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $(t^2+1)^2$ | | $+$ | | $+$ | |
| $g'(t)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $g(t)$ | $0$ | $\nearrow$ | $2$ | $\searrow$ | $0$ |

**b.** D'après ce tableau de variations, la fonction $g$ admet un maximum pour $t=1$ ; ce maximum vaut $g(1)=2$.

Donc la concentration maximale de 2 mg/l est atteinte 1 heure après l'injection.

**3.** $g(t)=\dfrac{4t}{t^2+1}=\dfrac{4t}{t^2\left(1+\dfrac{1}{t^2}\right)}=\dfrac{4}{t\left(1+\dfrac{1}{t^2}\right)}$.

**Remarque**
Par quotient, la limite en plus l'infini donne la forme indéterminée $\dfrac{\infty}{\infty}$.

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{t\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{t^2}\right)=1\\[2ex] \lim\limits_{t\to+\infty} t=+\infty\end{array}\right\}\text{ Par produit, }\lim_{t\to+\infty} t\left(1+\frac{1}{t^2}\right))=+\infty$$

Par quotient, $\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{4}{t\left(1+\dfrac{1}{t^2}\right)}=0$.

Ainsi, $\lim\limits_{t\to+\infty} g(t)=0$. On en déduit que la concentration de l'antibiotique se rapproche de 0 lorsque $t$ tend vers $+\infty$.

**Remarque**
Il n'y a plus d'antibiotique dans le sang quand $t$ devient grand.

**4.** Pour calculer le temps d'antibiotique utile, on va résoudre l'inéquation $g(t)>1,2$.

$$\begin{aligned} g(t)>1,2 &\iff \frac{4t}{t^2+1}>1,2\\ &\iff 4t>1,2(t^2+1) \qquad \text{car } t^2+1>0 \text{ sur } \mathbb{R}\\ &\iff 0>1,2t^2-4t+1,2\end{aligned}$$

La discriminant du polynôme $1,2t^2-4t+1,2$ est $\Delta=10,24=3,2^2$ donc ce polynôme admet deux racines : $t_1=\dfrac{4-3,2}{2\times1,2}=\dfrac{0,8}{2,4}=\dfrac{1}{3}$ et $t_2=\dfrac{4+3,2}{2,4}=\dfrac{7,2}{2,4}=3$.

Le polynôme est du signe du coefficient de $t^2$ donc positif à l'extérieur des racines, du signe contraire donc négatif entre les racines.

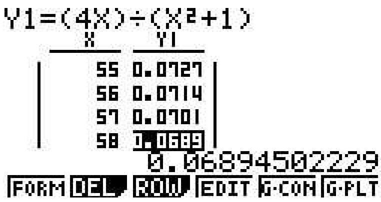
| $t$ | $0$ | | $\frac{1}{3}$ | | $3$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Signe de $1{,}2t^2-4t+1{,}2$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |

L'ensemble solution sur $[0\,;+\infty[$ de l'inéquation $g(t)>2$ est donc l'intervalle $\left]\frac{1}{3}\,;3\right[$.

La durée pendant laquelle la concentration de l'antibiotique est supérieure à 1,2 mg/l est donc :

$$3-\frac{1}{3}=2+\frac{2}{3} \text{ soit 2 h 40 minutes.}$$

**5.** On utilise un tableau de valeurs de a fonction $g$ :




**Calculatrice**

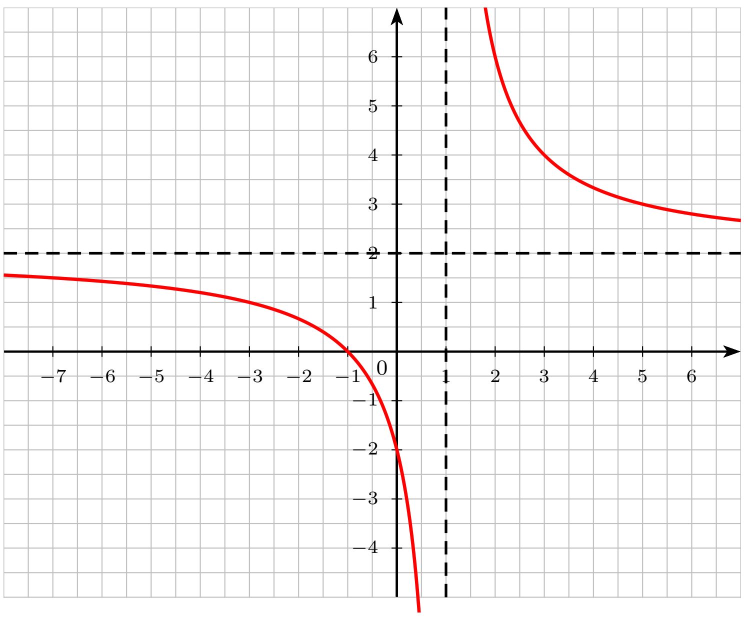
On cherche la plus petite valeur de $n$ telle que $g(n)<0,07$.

La valeur de la variable $n$ à la fin de l'algorithme est 58.

Cela signifie que la concentration de l'antibiotique est inférieure à 0,07 mg/L, 58 heures après l'injection.

# Exercice 2

On donne ci-contre la courbe représentative d'une fonction $f$.



**1.** Graphiquement, on peut conjecturer que :

☐ $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=1$ ;
☒ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=2$ ;
☐ $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x<1}} f(x)=+\infty$.

La droite d'équation $y=2$ est asymptote horizontale à la courbe en $+\infty$.

**2.** Graphiquement, on peut conjecturer que :

☐ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$ ;
☒ $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x>1}} f(x)=+\infty$ ;
☐ $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$.

La droite d'équation $x=1$ est asymptote verticale à la courbe.
On a aussi, $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x<1}} f(x)=-\infty$.

**3.** Soient $k$ une fonction à valeurs positives sur $\mathbb{R}$ vérifiant $\lim\limits_{x \to -\infty} k(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} k(x) = 3$, $u$ la fonction définie par $u(x) = \sqrt{k(x)+1}$ et $\mathscr{C}_u$ la courbe représentative de $u$ dans un repère orthogonal du plan. On peut affirmer que :

☐ $\lim\limits_{x \to +\infty} u(x) = +\infty$ ;

☐ $\mathscr{C}_u$ admet une asymptote verticale ;

☒ $\mathscr{C}_u$ admet une asymptote horizontale.

En posant $X = k(x)+1$, on obtient :

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to +\infty} \overbrace{k(x)+1}^{X} = 4 \quad \text{car} \quad \lim\limits_{x \to +\infty} k(x) = 3. \\ \lim\limits_{X \to 4} \sqrt{X} = 2 \end{array}\right\} \text{Par composition, } \lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{k(x)+1} = 2$$

On en déduit que la droite d'équation $y = 2$ est une asymptote horizontale à $\mathscr{C}_u$.

**4.** $p$ est une fonction dont la courbe représentative admet pour asymptotes les droites d'équations $x = -1$ et $y = 3$. Des expressions suivantes, laquelle peut correspondre à $p(x)$ ?

☐ $\dfrac{3x^2}{x+1}$ ;

☐ $\dfrac{3x^2}{x^2+1}$ ;

☒ $\dfrac{3x^2}{(x+1)^2}$.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ x > -1}} 3x^2 = 3 \\ \lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ x > -1}} (x+1)^2 = 0^+ \end{array}\right\} \text{Par quotient, } \lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ x > -1}} \frac{3x^2}{(x+1)^2} = +\infty$$

La droite d'équation $x = -1$ est une asymptote verticale à la courbe représentant $p$.

$$p(x) = \frac{3x^2}{(x+1)^2} = \frac{3x^2}{x^2+2x+1} = \frac{3x^2}{x^2\left(1+\dfrac{2x}{x^2}+\dfrac{1}{x^2}\right)} = \frac{3\cancel{x^2}}{\cancel{x^2}\left(1+\dfrac{2}{x}+\dfrac{1}{x^2}\right)} = \frac{3}{1+\dfrac{2}{x}+\dfrac{1}{x^2}}.$$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \left(1+\dfrac{2}{x}+\dfrac{1}{x^2}\right) = 1.$

Par quotient, $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{3}{1+\dfrac{2}{x}+\dfrac{1}{x^2}} = 3.$

On en déduit que la droite d'équation $y = 3$ est une asymptote horizontale à courbe représentant $p$ en $+\infty$.

**5.** Si $g$ est une fonction telle que $\lim\limits_{\substack{x \to -2 \\ x > -2}} g(x) = -\infty$ alors sa courbe représentative :

☐ admet une asymptote horizontale d'équation $y = -2$ ;

☒ admet une asymptote verticale d'équation $x = -2$ ;

☐ n' admet pas d'asymptote.

**6.** Si $q$ est une fonction telle que, pour tout réel strictement positif $x$, $3+\frac{1}{x}<q(x)<3+\frac{2}{x}$ alors :

☐ $q$ a une limite en $+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} q(x)=0$ ;

☒ $q$ a une limite en $+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} q(x)=3$ ;

☐ on ne peut rien dire concernant le comportement de $q$ en $+\infty$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} 3+\frac{1}{x}=3$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} 3+\frac{2}{x}=3$.
D'après le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{x\to+\infty} q(x)=3$.

**7.** Avec la même fonction qu'à la question précédente, on peut affirmer que :

☐ $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} q(x)=0$ ;

☐ $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} q(x)=3$ ;

☒ $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} q(x)=+\infty$.

$\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} 3+\frac{1}{x}=+\infty$.
Par comparaison, $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} q(x)=+\infty$

**8.** Si $f$ est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$, alors on peut dire que :

☐ $f$ est croissante sur $\mathbb{R}$ ;

☐ la courbe de $f$ admet deux asymptotes horizontales ;

☒ la courbe de $f$ n'admet pas d'asymptote verticale.

La fonction est dérivable sur $\mathbb{R}$, elle est donc continue, sa courbe n'admet donc pas d'asymptote verticale.

**9.** Avec la même fonction qu'à la question précédente, on peut affirmer que :

☐ $\lim\limits_{x\to+\infty} (f(x)-x^2)=0$ ;

☐ $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{3}{x}\times f(x)=0$ ;

☒ $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)+4}{f(x)}=1$.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)\left(1+\frac{4}{f(x)}\right)}{f(x)}=\lim_{x\to+\infty} 1+\frac{4}{f(x)}=1 \text{ car } \lim_{x\to+\infty} \frac{4}{f(x)}=0.$$

**10.** Toujours avec la même fonction qu'à la question précédente, on peut affirmer que :

☐ $\lim\limits_{x\to+\infty} (1-f(x))^3=0$ ;

☒ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(1-x)=1$ ;

☐ $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{f(x)}=-\infty$.

On pose $X=1-x$.

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty} \overbrace{(1-x)}^{X}=-\infty\\ \lim\limits_{X\to-\infty} f(X)=1\end{array}\right\}\quad \text{Par composition, } \lim_{x\to+\infty} f(1-x)=1$$