MATHEMATIQUES
Limites de fonctions : QCM (corrigé)

Exercice 1

Par quotient, on a une forme indéterminée « $\dfrac{\infty}{\infty}$ ».
On lève l'indétermination :

- On développe le dénominateur.

$$\frac{1+x^2+x^3}{x\left(1-x^2\right)} = \frac{1+x^2+x^3}{x-x^3}.$$

- On factorise.

$$\frac{1+x^2+x^3}{x-x^3} = \frac{\cancel{x^3}\left(\dfrac{1}{x^3}+\dfrac{x^2}{x^3}+\dfrac{x^3}{x^3}\right)}{\cancel{x^3}\left(\dfrac{x}{x^3}-\dfrac{x^3}{x^3}\right)} \quad \text{On factorise.}$$

$$= \frac{\dfrac{1}{x^3}+\dfrac{1}{x}+1}{\dfrac{1}{x^2}-1} \quad \text{On simplifie.}$$

Méthode

On développe d'abord le dénominateur pour avoir un quotient de deux polynômes. On factorise au numérateur et au dénominateur par le terme de plus degré. Après avoir simplifié, on utilise la limite d'u quotient.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1}{x^3}+\dfrac{1}{x}+1\right)=1 \\ \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1}{x^2}-1\right)=-1 \end{array}\right\} \text{Par quotient, } \lim_{x\to+\infty}\frac{\dfrac{1}{x^3}+\dfrac{1}{x}+1}{\dfrac{1}{x^2}-1}=-1$$

Ainsi, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{1+x^2+x^3}{x\left(1-x^2\right)}=-1$.

Réponse : c.

Exercice 2

On pose $X=-\dfrac{x+1}{x}$.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{\substack{x\to0\\x<0}} x+1=1 \\ \lim\limits_{\substack{x\to0\\x<0}} x=0^- \end{array}\right\} \text{Par quotient, } \lim_{\substack{x\to0\\x<0}}\frac{x+1}{x}=-\infty$$

Par produit, $\displaystyle\lim_{\substack{x\to0\\x<0}}-\frac{x+1}{x}=+\infty$ donc $\displaystyle\lim_{\substack{x\to0\\x<0}}X=+\infty$.

Méthode

On écrit la fonction f comme une composée de deux fonctions. Ici :
$x\longmapsto-\dfrac{x+1}{x}$ et $x\longmapsto\sqrt{x}$.
Procédez par étape en commençant par déterminer la limite de la première fonction.

Ainsi :

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{\substack{x\to0\\x<0}} -\dfrac{x+1}{x}=+\infty \\ \lim\limits_{X\to+\infty}\sqrt{X}=+\infty \end{array}\right\} \text{Par composition, } \lim_{\substack{x\to0\\x<0}}f(x)=+\infty$$

Attention

X c'est $-\dfrac{x+1}{x}$ et $-\dfrac{x+1}{x}$ tend vers $+\infty$.

Réponse : d.

Exercice 3

Par quotient, on a une forme indéterminée « $\dfrac{\infty}{\infty}$ ».
On lève l'indétermination :

- On développe le numérateur et le dénominateur.

$$\frac{(2x-3)(x^2+1)}{(1-x^2)^2} = \frac{2x^3+2x-3x^2-3}{1-2x^2+x^4} = \frac{2x^3-3x^2+2x-3}{x^4-2x^2+1}.$$

- On factorise.

Méthode

On développe d'abord le dénominateur pour avoir un quotient de deux polynômes. On factorise au numérateur et au dénominateur par le terme de plus degré. Après avoir simplifié, on utilise la limite d'u quotient.

$$\frac{2x^3-3x^2+2x-3}{x^4-2x^2+1} = \frac{2x^3\left(1-\frac{3x^2}{2x^3}+\frac{2x}{2x^3}-\frac{3}{2x^3}\right)}{x^4\left(1-\frac{2x^2}{x^4}+\frac{1}{x^4}\right)} \quad \text{On factorise.}$$

$$= \frac{2\left(1-\frac{3}{2x}+\frac{1}{x^2}-\frac{3}{2x^3}\right)}{x\left(1-\frac{2}{x^2}+\frac{1}{x^4}\right)} \quad \text{On simplifie.}$$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty} 2\left(1-\frac{3}{2x}+\frac{1}{x^2}-\frac{3}{2x^3}\right)=2 \\ \lim\limits_{x\to+\infty} 1-\frac{2}{x^2}+\frac{1}{x^4}=1, \text{par produit, } \lim\limits_{x\to+\infty} x\left(1-\frac{2}{x^2}+\frac{1}{x^4}\right)=+\infty\end{array}\right\} \text{Par quotient, } \lim_{x\to+\infty}\frac{2\left(1-\frac{3}{2x}+\frac{1}{x^2}-\frac{3}{2x^3}\right)}{x\left(1-\frac{2}{x^2}+\frac{1}{x^4}\right)}=0$$

Ainsi, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$.

Réponse : b.

Exercice 4

- $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2=+\infty$, comme pour $x\geqslant 2$, $x^2\leqslant f(x)$, par comparaison :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$$

La réponse a. est correcte.

- En divisant par $x>0$, l'inégalité $x^2\leqslant f(x)$ devient $x\leqslant \dfrac{f(x)}{x}$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} x=+\infty$, comme pour $x\geqslant 2$, $x\leqslant \dfrac{f(x)}{x}$, par comparaison :

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=+\infty$$

La réponse c. est correcte.

- En divisant par $x^2>0$, l'inégalité $x^2\leqslant f(x)$ devient $1\leqslant \dfrac{f(x)}{x^2}$.

On ne peut pas conclure quant à la limite de $\dfrac{f(x)}{x^2}$ en $+\infty$.

Réponse : a. et c

Exercice 5

Il y a quatre limites à calculer :
$\lim_{x\to 2} h(x)$, $\lim_{x\to -2} h(x)$, $\lim_{x\to +\infty} h(x)$ et $\lim_{x\to -\infty} h(x)$.

- en 2 :

$$\left.\begin{array}{l}\lim_{x\to 2}(2x-1)^2 = 9\\[2ex] \lim_{\substack{x\to 2\\ x>2}} 2(4-x^2) = 0^-\end{array}\right\}\ \text{Par quotient, } \lim_{x\to 2} h(x) = -\infty$$

Pensez-y !

Le signe du dénominateur est donné par :

x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
$2(4-x^2) = 8-2x^2$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Ainsi, pour $x>2$, $2(4-x^2)<0$. Le dénominateur est strictement négatif. Cela à son importance après pour le passage au quotient.

On en déduit que graphiquement la droite d'équation $x=2$ est un asymptote verticale à la courbe représentant la fonction h.

- en -2 :

$$\left.\begin{array}{l}\lim_{x\to -2}(2x-1)^2 = 25\\[2ex] \lim_{\substack{x\to -2\\ x>-2}} 2(4-x^2) = 0^+\end{array}\right\}\ \text{Par quotient, } \lim_{x\to -2} h(x) = +\infty$$

Pensez-y !

Utilisez le tableau de signes précédent pour le signe de $2(4-x^2)$ pour $x>-2$ (en restant proche de -2. On pouvait aussi calculer $\lim_{\substack{x\to -2\\ x<-2}} 2(4-x^2)$. Le résultat aurait été le même concernant l'asymptote.

On en déduit que graphiquement la droite d'équation $x=-2$ est un asymptote verticale à la courbe représentant la fonction h.

- en $+\infty$:

On développe le numérateur et le dénominateur.

$\dfrac{(2x-1)^2}{2(4-x^2)} = \dfrac{4x^2-4x+1}{8-2x^2}$.

On factorise :

$$\begin{aligned}\frac{4x^2-4x+1}{8-2x^2} &= \frac{4x^2\left(1-\frac{4x}{4x^2}+\frac{1}{4x^2}\right)}{-2x^2\left(\frac{8}{-2x^2}+1\right)} && \text{On factorise par les termes de plus haut degré.}\\ &= \frac{-2\left(1-\frac{1}{x}+\frac{1}{4x^2}\right)}{\frac{-4}{x^2}+1} && \text{On simplifie.}\end{aligned}$$

$$\left.\begin{array}{l}\lim_{x\to +\infty} 1-\frac{1}{x}+\frac{1}{4x^2} = 1,\ \text{par produit, } \lim_{x\to +\infty} -2\left(1-\frac{1}{x}+\frac{1}{4x^2}\right) = -2\\[2ex] \lim_{x\to +\infty} \frac{-4}{x^2}+1 = 1\end{array}\right\}\ \text{Par quotient, } \lim_{x\to +\infty} h(x) = -2$$

On en déduit que la droite d'équation $y=-2$ est asymptote horizontale à $\mathscr{C}_h$ en $+\infty$.

- en $-\infty$: on a exactement la même limite qu'en $+\infty$.

Réponse : a. b. et c.

Exercice 6

1.

$$\left.\begin{array}{l}\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x-b=+\infty \\ \text{par passage à l'inverse, } \displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x-b}=0\end{array}\right\}\ \text{Par somme, } \lim_{x\to+\infty} a+\frac{1}{x-b}=a$$

Ainsi, la droite d'équation $y=a$ est une asymptote horizontale à $\mathscr{C}$.

$$\left.\begin{array}{l}\displaystyle\lim_{\substack{x\to b\\x>b}} x-b=0^+ \\ \text{par inverse, } \displaystyle\lim_{\substack{x\to b\\x>b}}\frac{1}{x-b}=+\infty\end{array}\right\}\ \text{Par somme, } \lim_{\substack{x\to b\\x>b}} a+\frac{1}{x-b}=+\infty$$

Pareil

On pouvez aussi calculer $\displaystyle\lim_{\substack{x\to b\\x>b}} a+\frac{1}{x-b}$.

Ainsi, la droite d'équation $x=b$ est une asymptote verticale à $\mathscr{C}$.

Réponse : b. et c.

2. On a $\displaystyle\lim_{x\to1}\frac{x-1}{x}=0$, $\displaystyle\lim_{x\to1}\frac{x}{x+1}=\frac{1}{2}$ et $\displaystyle\lim_{x\to1}\frac{x+1}{x}=2$.

On en déduit que les fonctions en b., c. et d. ne conviennent pas.

Mais, $\displaystyle\lim_{\substack{x\to1\\x>1}}\frac{x}{x-1}=+\infty$, ainsi la droite d'équation $x=1$ est asymptote à $\mathscr{C}$.

De plus, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x-1}=1$.

En effet, $\displaystyle\frac{x}{x-1}=\frac{x}{x\left(1-\frac{1}{x}\right)}=\frac{1}{1-\frac{1}{x}}$.

$\displaystyle\lim_{x\to+\infty}1-\frac{1}{x}=1$ et par quotient, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x-1}=1$, ainsi la droite d'équation $y=1$ est asymptote à $\mathscr{C}$.

Réponse : a.

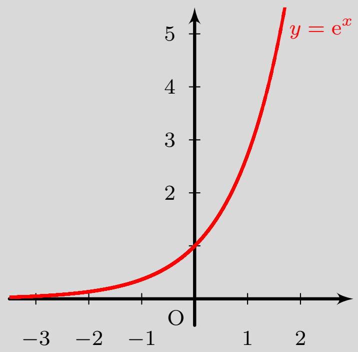
Exercice 7

Soit f la fonction exponentielle. Soit $\mathscr{C}$ sa représentation graphique.

- $f'(x)=\mathrm{e}^x>0$, donc $\mathscr{C}$ n'a pas de tangente horizontale.
- $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\mathrm{e}^x=0$. Donc la droite d'équation $y=0$ est une asymptote horizontale à $\mathscr{C}$.
- La droite d'équation $y=x$ n'est pas tangente à $\mathscr{C}$.
- $\mathscr{C}$ n'a pas de tangente verticale.

Courbe

Pour répondre à ces questions rien de mieux que d'avoir la courbe en tête !



Réponse : b.