MATHEMATIQUES
Fonction logarithme népérien : entraînement 2 (corrigé)

Exercice 1
Partie A

1. La fonction f est sous la forme d'un quotient. $f(x) = \dfrac{\overbrace{\ln x}^{u(x)}}{\underbrace{x}_{v(x)}}$.

$u(x) = \ln x$ et $v(x) = x$. On a donc : $u'(x) = \dfrac{1}{x}$ et $v'(x) = 1$.

On utilise la formule $f' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$.

La fonction h est dérivable sur $]0\ ;\ +\infty[$,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{\overbrace{x}^{v(x)} \times \overbrace{\frac{1}{x}}^{u'(x)} - \overbrace{1}^{v'(x)} \times \overbrace{\ln x}^{u(x)}}{\underbrace{x^2}_{(v(x))^2}} \\ &= \frac{1 - \ln x}{x^2} \end{aligned}$$

Comme $x^2 > 0$ sur $]0\ ;\ +\infty[$, $f'(x)$ a donc le même signe que $1 - \ln(x)$. Or :

$$\begin{aligned} 1 - \ln(x) &\geqslant 0 \\ 1 &\geqslant \ln(x) \\ \ln \mathrm{e} &\geqslant \ln x \\ \mathrm{e} &\geqslant x \end{aligned}$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0^+} \ln x = -\infty \\ \lim\limits_{x \to 0^+} x = 0^+ \end{array}\right\} \text{Par quotient, } \lim_{x \to 0^+} \frac{\ln x}{x} = -\infty$$

Non non non
Pas de forme indéterminée ici.

Ainsi, $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = -\infty$.

Et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$ (par croissance comparée).

De plus, $f(\mathrm{e}) = \dfrac{\ln(\mathrm{e})}{\mathrm{e}} = \dfrac{1}{\mathrm{e}}$.

On a donc le tableau de variation suivant :

x	0		1		α_n		e		$+\infty$
$f'(x)$				$+$			0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$\frac{1}{n}$	$\nearrow$	$\frac{1}{\mathrm{e}}$	$\searrow$	0

Impossible
La courbe est donnée, donc pas question d'obtenir d'autres variations que celles là.

Remarque : les limites n'étaient pas exigées dans l'énoncé.

2. D'après le tableau de variation précédent, la fonction f a pour maximum $\dfrac{1}{\mathrm{e}}$ et ce maximum est atteint en $x = \mathrm{e}$.

Partie B

1. Soit n un entier tel que $n \geqslant 3$, alors $0 < \dfrac{1}{n} \leqslant \dfrac{1}{3} \leqslant \dfrac{1}{\mathrm{e}}$.

En effet, la fonction inverse est strictement décroissante sur $]0\ ;\ +\infty[$ et $\mathrm{e} < 3$ donc $\dfrac{1}{\mathrm{e}} > \dfrac{1}{3}$.

Sur l'intervalle $[1\ ;\ \mathrm{e}]$:

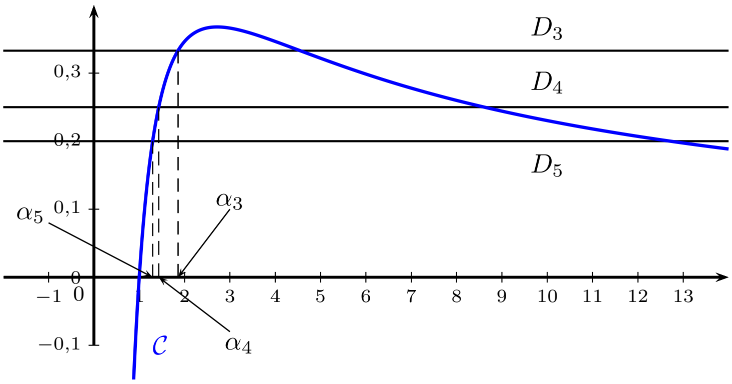
- f est continue (car dérivable) ;
- f est strictement croissante ;
- $\dfrac{1}{n}$ est une valeur intermédiaire entre 0 et $\dfrac{1}{\mathrm{e}}$.

Essentiel

Il faut absolument justifier que : $\dfrac{1}{n} \in \left[0\ ;\ \dfrac{1}{\mathrm{e}}\right]$ pour $n \geqslant 3$.

Donc, d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = \dfrac{1}{n}$ admet une unique solution α_n dans $[1\ ;\ \mathrm{e}]$.

2. a. Les abscisses inférieures à e des points d'intersection entre les droite D_3, D_4, D_5 et la courbe $\mathcal{C}$ sont les nombre α_3, α_4 et α_5. Graphiquement, on lit que $\alpha_3 > \alpha_4 > \alpha_5$, il semble donc que la suite (α_n) soit décroissante.



b. Soit n un entier tel que $n \geqslant 3$. Par définition de la suite (α_n), on a $f(\alpha_n) = \dfrac{1}{n}$ et $f(\alpha_{n+1}) = \dfrac{1}{n+1}$.

$$\text{Comme } \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n}, \text{ on a donc } f(\alpha_{n+1}) < f(\alpha_n)$$

La fonction f est strictement croissante sur $[1\ ;\ \mathrm{e}]$, donc pour pour entier naturel $n \geqslant 3$:

$$f(\alpha_{n+1}) < f(\alpha_n) \Longrightarrow \alpha_{n+1} < \alpha_n$$

c. La suite (α_n) est décroissante, minorée (par 1), elle est donc convergente.

3. a. Soit n un entier tel que $n \geqslant 3$. Par définition de β_n, on a :

$$f(\beta_n) = \frac{1}{n} \Longleftrightarrow \frac{\ln(\beta_n)}{\beta_n} = \frac{1}{n} \Longleftrightarrow \ln(\beta_n) = \frac{\beta_n}{n}.$$

La suite (β_n) est croissante.
Donc, pour tout entier naturel $n \geqslant 3$ on a $\beta_n \geqslant \beta_3 > 0$.

A utiliser

Une suite croissante est minorée par son premier terme. Ic, la suite (β_n) est croissante, elle est donc minorée par son premier terme : β_3.

La fonction ln est croissante sur $]0\ ;\ +\infty[$, donc $\ln(\beta_n) \geqslant \ln(\beta_3)$.

On a donc pour tout entier naturel $n \geqslant 3$:

$$\left.\begin{aligned} \ln(\beta_n) &\geqslant \ln(\beta_3) \\ \ln(\beta_n) &= \frac{\beta_n}{n} \end{aligned}\right\} \text{ Donc, } \frac{\beta_n}{n} \geqslant \ln \beta_3 = \frac{\beta_3}{3} \text{ soit } \beta_n \geqslant n\frac{\beta_3}{3}$$

b. $\beta_3 > 0$, donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} n\frac{\beta_3}{3} = +\infty$.
Par comparaison à l'infini, on en déduit que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \beta_n = +\infty$.

Exercice 2

L'idée générale

L'idée générale pour traiter cet exercice est d'étudier les variations des fonctions f_k, d'établir qu'elles ont un minimum qui s'exprime en fonction de k de calculer ce minimum et donc d'avoir les coordonnées des points notés sur le graphique. Avec ces coordonnées, on devrait pouvoir montrer que ces points sont alignés ou pas en trouvant un lien entre les abscisses et les ordonnées de ces points : un lien de la forme $y = mx + p$ prouverait l'alignement.... et même graphiquement, on peut conjecturer que ce lien est $y = x + 1$, non ?

Les fonctions f_k sont dérivables sur $\mathbb{R}$ (sommes de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$:
$\forall x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} f'_k(x) &= 1 + k \times \overbrace{(-1)\mathrm{e}^{-x}}^{\substack{\text{Dérivée de} \\ x \mapsto \mathrm{e}^{-x}}} \\ &= 1 - k\mathrm{e}^{-x} \end{aligned}$$

On étudie le signe de la dérivée en résolvant (par exemple) l'inéquation $f'_k(x) \leqslant 0$.

$$\begin{aligned} 1 - k\mathrm{e}^{-x} &\leqslant 0 \\ 1 &\leqslant k\mathrm{e}^{-x} \\ \frac{1}{k} &\leqslant \mathrm{e}^{-x} && \text{Car } k > 0. \\ \mathrm{e}^{\ln\frac{1}{k}} &\leqslant \mathrm{e}^{-x} \\ \mathrm{e}^{-\ln k} &\leqslant \mathrm{e}^{-x} && \text{Car } \ln\frac{1}{k} = -\ln k. \\ -\ln k &\leqslant -x && \text{Car } \mathrm{e}^X < \mathrm{e}^Y \iff X < Y. \\ \ln k &\geqslant x \end{aligned}$$

On en déduit le tableau de variations :

x	$-\infty$		$\ln k$		$+\infty$
$f'_k(x)$		$-$	0	$+$	
$f_k(x)$		$\searrow$	$1 + \ln k$	$\nearrow$	

On a $f(\ln k) = \ln k + k\mathrm{e}^{-\ln k} = \ln k + k \times \dfrac{1}{\mathrm{e}^{\ln k}} = \ln k + k \times \dfrac{1}{k} = \ln k + 1$.

Méthode

C'est essentiel de simplifier l'écriture de $f(\ln k)$ qui est l'ordonnée des points qui nous intéressent.

D'après les données, pour tout réel k strictement positif, la fonction f_k présente un minimum sur $\mathbb{R}$ et la valeur en laquelle ce minimum est atteint est l'abscisse x_k du point A_k de la courbe $\mathscr{C}_k$.

Les coordonnées des points A_k sont $(\ln k\ ;\ 1 + \ln k)$.

Les points A_k sont donc bien alignés puisque leurs coordonnées vérifient l'équation $y = x + 1$

Méthode

On passe de l'abscisse du point A_k à son ordonnée en ajoutant 1.