MATHEMATIQUES
Fonction logarithme népérien : QCM (corrigé)

Exercice 1

1.

Propriétés

Pour tous réels $x > 0$ et $y > 0$ et tout $n \in \mathbb{Z}$:

$$\ln(x \times y) = \ln(x) + \ln(y)$$

$$\ln\left(\frac{1}{x}\right) = -\ln(x) \quad ; \quad \ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln(x) - \ln(y) \quad ; \quad \ln\left(x^n\right) = n\ln(x) \quad ; \quad \ln\left(\sqrt{x}\right) = \frac{1}{2}\ln(x)$$

- $\ln a + \ln a = 2\ln a$.
- $\ln(a^2) = 2\ln a$.

Attention

$(\ln a)^2 = \ln a \times \ln a \neq \ln(a^2)$.
$\ln(a^2) = \ln(a \times a)$.

Réponse : b. et c.

2.
- $\ln(a^3) - \ln(a^7) = 3\ln a - 7\ln a = -4\ln a$.
- $\ln(a^3) - \ln(a^7) = \ln\left(\frac{a^3}{a^7}\right) = \ln\left(\frac{1}{a^4}\right)$.
- $-4\ln a = \ln\left(a^{-4}\right)$.

Réponse : a. b. et d.

3. $\ln(a^n) + \ln(a^{-n}) = \ln(a^n \times a^{-n}) = \ln(a^0) = \ln 1 = 0$.

Réponse : a. et d.

4.
- $\ln(\sqrt{a^n}) = \frac{1}{2}\ln(a^n) = \frac{1}{2} \times n\ln a = \frac{n\ln a}{2}$.
- $n\ln\sqrt{a} = \ln(\sqrt{a^n})$.

Réponse : b. et d.

Exercice 2

1. f est de la forme u^2 avec $u(x) = \ln x$.

$f' = 2uu'$.
Ainsi, $f'(x) = 2\ln x \times \frac{1}{x} = \frac{2\ln x}{x}$.

N'oubliez pas !

La dérivée de u^n est $nu^{n-1} \times u'$. Ici, $u'(x) = \frac{1}{x}$.

Réponse : a.

2. $\lim\limits_{x \to 0^+} \ln x = -\infty$, donc $\lim\limits_{x \to 0^+} (\ln x)^2 = +\infty$. On en déduit que la droite d'équation $x = 0$ est une asymptote verticale à la courbe représentant f.

Réponse : b.

3. L'équation $(\ln x)^2 = 0$ a pour unique solution 1. On en déduit que la courbe représentative de f coupe l'axe des abscisses en $x = 1$.

Réponse : b.

4. La tangente à la courbe est donnée par $y = f'(\mathrm{e})(x - \mathrm{e}) + f(\mathrm{e})$.

On a $f'(\mathrm{e}) = \dfrac{2\ln \mathrm{e}}{\mathrm{e}} = \dfrac{2}{\mathrm{e}}$ et $f(\mathrm{e}) = (\ln \mathrm{e})^2 = 1$.
On a donc une équation de la forme $y = \dfrac{2}{\mathrm{e}}(x - \mathrm{e}) + 1$ soit $y = \dfrac{2}{\mathrm{e}}x - 1$.

Réponse : a. et c.

Exercice 3

1.

$$\begin{array}{rcll} 1,2^n & > & 50 & \\ \ln(1,2^n) & > & \ln 50 & \text{Car la fonction ln est strictement croissante sur }]0~;~+\infty[. \\ n\ln 1,2 & > & \ln 50 & \text{Car } \ln a^n = n\ln a. \\ n & > & \dfrac{\ln 50}{\ln 1,2} & \text{Car } \ln 1,2 > 0. \end{array}$$

Comme $\dfrac{\ln 50}{\ln 1,2} \simeq 21,5$, on en déduit que l'inéquation est équivalente à $n \geqslant 22$.

Réponse : d.

2.

$$\begin{array}{rcll} \left(\dfrac{3}{5}\right)^n & < & 0,01 & \\ \ln\left(\dfrac{3}{5}\right)^n & < & \ln 0,01 & \text{Car la fonction ln est strictement croissante sur }]0~;~+\infty[. \\ n\ln\left(\dfrac{3}{5}\right) & < & \ln 0,01 & \text{Car } \ln a^n = n\ln a. \\ n & > & \dfrac{\ln 0,01}{\ln\left(\dfrac{3}{5}\right)} & \text{Car } \ln\left(\dfrac{3}{5}\right) < 0. \end{array}$$

Comme $\dfrac{\ln 0,01}{\ln\left(\dfrac{3}{5}\right)} \simeq 9,01$, on en déduit que l'inéquation est équivalente à $n \geqslant 10$.

De plus, $\dfrac{\ln 0,01}{\ln\left(\dfrac{3}{5}\right)} = \dfrac{\ln\left(\dfrac{1}{100}\right)}{\ln 3 - \ln 5} = \dfrac{-\ln(100)}{\ln 3 - \ln 5} = \dfrac{\ln(100)}{\ln 5 - \ln 3}$

Réponse : a. et d.

Exercice 4

1.

$$\left.\begin{array}{l} \displaystyle\lim_{x\to 0^+} x\ln x = 0 \\ \displaystyle\lim_{x\to 0^+} \ln x = -\infty \end{array}\right\} \text{ Par différence, } \lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$$

Réponse : c.

2. Par différence, on a une forme indéterminée.

Pour tout réel $x > 0$, $x\ln x - \ln x = x\left(\ln x - \dfrac{\ln x}{x}\right)$.

$$\left.\begin{array}{l}\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(\ln x - \frac{\ln x}{x}\right) = +\infty \quad \text{car} \quad \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x} = 0 \\ \displaystyle\lim_{x\to+\infty} x = +\infty\end{array}\right\}\ \text{Par produit, } \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$

Réponse : c.

Exercice 5

1.

$$\left.\begin{array}{l}\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right) = 1 \qquad \text{car} \quad \frac{n+1}{n} = 1 + \frac{1}{n} \\ \displaystyle\lim_{N\to 1} \ln N = 0\end{array}\right\}\ \text{Par composition, } \lim_{n\to+\infty}\ln\left(\frac{n+1}{n}\right) = 0$$

Réponse : b.

2. On a $\dfrac{n+1}{n} = 1 + \dfrac{1}{n}$. On en déduit que $1 < 1 + \dfrac{1}{n} < 2$.

On a alors : $\ln 1 < \ln\left(1 + \dfrac{1}{n}\right) < \ln 2 < 1$.

Réponse : b. et c.

Faites-le !

Il n'est pas inutile de calculer les premiers termes de la suite pour faire une conjecture. Et même affirmer qu'elle n'est pas monotone ! Utilisez votre calculatrice pour cela.

3. Pour étudier les variations de la suite, on étudie le signe de la différence : $u_{n+1} - u_n$.

$$\begin{array}{rcll} u_{n+1} - u_n & = & \ln\left(\dfrac{n+2}{n+1}\right) - \ln\left(\dfrac{n+1}{n}\right) & \\ & = & \ln\left(\dfrac{\dfrac{n+2}{n+1}}{\dfrac{n+1}{n}}\right) & \text{Car } \ln a - \ln b = \ln\dfrac{a}{b}. \\ & = & \ln\left(\dfrac{n+2}{n+1} \times \dfrac{n}{n+1}\right) & \text{Car diviser revient à multiplier par l'inverse.} \\ & = & \ln\left(\dfrac{n(n+2)}{(n+1)^2}\right) & \end{array}$$

Or, pour tout entier naturel n non nul : $0 < \dfrac{n(n+2)}{(n+1)^2} < 1$ car $n(n+2) = n^2 + 2n$ et $(n+1)^2 = n^2 + 2n + 1$.

Comme $\ln x < 0$ pour tout $x \in]0\ ;\ 1[$, on en déduit que pour tout entier naturel n, $u_{n+1} - u_n < 0$.
La suite u est donc strictement décroissante.

Réponse : b.

4. Pour tout entier $n > 0$,

$$\begin{array}{rcll}
u_n & < & a & \\
\ln\left(\dfrac{n+1}{n}\right) & < & a & \\
\ln\left(\dfrac{n+1}{n}\right) & < & \ln \mathrm{e}^a & \text{Car pour tout réel , } \ln \mathrm{e}^x = x. \\
\dfrac{n+1}{n} & < & \mathrm{e}^a & \text{Car } \ln x < \ln y \iff x < y. \\
n+1 & < & n \times \mathrm{e}^a & \text{En multipliant par } n > 0. \\
n - n\mathrm{e}^a & < & -1 & \\
n(1-\mathrm{e}^a) & < & -1 & \\
n & > & \dfrac{-1}{1-\mathrm{e}^a} & \text{Puisque } a > 0,\ 1 - \mathrm{e}^a < 0. \\
n & > & \dfrac{1}{\mathrm{e}^a - 1} &
\end{array}$$

Réponse : c.

Exercice 6

1. f est un produit de deux fonctions dérivables sur $I = \left]-\dfrac{1}{4}\ ;\ +\infty\right[$, elle est donc dérivable sur I.

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \overbrace{2}^{u'(x)} \times \overbrace{\ln(4x+1)}^{v(x)} + \overbrace{2x}^{u(x)} \times \overbrace{\frac{4}{4x+1}}^{v'(x)} \\
&= 2\ln(4x+1) + \frac{8x}{4x+1}
\end{aligned}$$

Formule

Si $u > 0$ et u dérivable, alors $\ln' u = \dfrac{u'}{u}$.

Réponse : c.

2. Le coefficient directeur de la tangente au point d'abscisse $\dfrac{1}{4}$ est donné par $f'\left(\dfrac{1}{4}\right)$.

On a $f'\left(\dfrac{1}{4}\right) = 2\ln\left(4 \times \dfrac{1}{4} + 1\right) + \dfrac{8 \times \dfrac{1}{4}}{4 \times \dfrac{1}{4} + 1} = 2\ln 2 + 1 = \ln 4 + 1$.

Réponse : b.