MATHEMATIQUES
Fonction logarithme népérien : entraînement savoir-faire (corrigé)

Exercice 1

x	0		1		$+\infty$
Signe de $\ln'(x) = \dfrac{1}{x}$	‖		$+$		
Variations de ln	‖	$-\infty$	0		$+\infty$

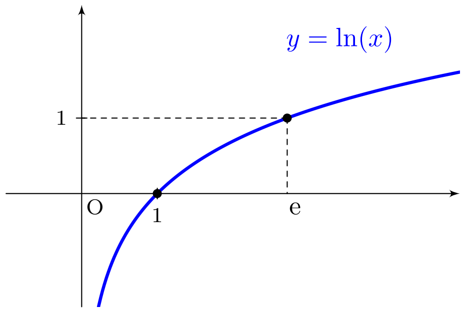

Tableau de signes de la fonction ln sur $]0\,;+\infty[$:

x	0		1		$+\infty$
Signe de $\ln(x)$	‖	$-$	0	$+$	

Exercice 2

Propriétés

Pour tous réels $x > 0$ et $y > 0$ et tout $n \in \mathbb{Z}$:

$$\ln(x \times y) = \ln(x) + \ln(y)$$

$$\ln\left(\frac{1}{x}\right) = -\ln(x) \quad ; \quad \ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln(x) - \ln(y) \quad ; \quad \ln\left(x^n\right) = n\ln(x) \quad ; \quad \ln\left(\sqrt{x}\right) = \frac{1}{2}\ln(x)$$

1.

$$\begin{aligned} \mathrm{A} &= \ln\left(\mathrm{e}^{-3}\right) + \mathrm{e}^{-\ln(2)} \\ &= -3 + \mathrm{e}^{\ln\left(\frac{1}{2}\right)} \\ &= -3 + 0,5 \\ &= -2,5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathrm{B} &= \frac{\ln(\mathrm{e})}{\ln\left(\mathrm{e}^2\right)} - \ln\left(\frac{1}{\mathrm{e}}\right) \\ &= \frac{\ln(\mathrm{e})}{2\ln(e)} - (-\ln(\mathrm{e})) \\ &= \frac{1}{2} + 1 = 1,5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathrm{C} &= \ln(16) - 7\ln(2) + 4\ln(32) + 3\ln\left(\frac{1}{8}\right) \\ &= \ln(2^4) - 7\ln(2) + 4\ln(2^5) + 3\ln(2^{-3}) \\ &= 4\ln(2) - 7\ln(2) + 4 \times 5\ln(2) - 3 \times 3\ln(2) \\ &= 8\ln(2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{D} &= 4\ln(125) - 6\ln(25) + 2\ln\left(\frac{1}{5}\right)\\
&= 4\times 3\ln(5) - 6\times 2\ln(5) - 2\ln(5)\\
&= -2\ln(5)
\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}
\mathrm{E} &= \ln(100)\\
&= \ln\left(2^2\times 5^2\right)\\
&= 2\ln(2) + 2\ln(5)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{F} &= \ln\left(\sqrt{10}\right)\\
&= \frac{1}{2}\ln(2\times 5)\\
&= \frac{1}{2}\ln(2) + \frac{1}{2}\ln(5)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{G} &= \ln(0{,}02)\\
&= \ln\left(\frac{2}{100}\right)\\
&= \ln(2) - (2\ln(2) + 2\ln(5))\\
&= -\ln(2) - 2\ln(5)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{H} &= \ln(80\mathrm{e})\\
&= \ln(16\times 5\times \mathrm{e})\\
&= 4\ln(2) + \ln(5) + 1
\end{aligned}$$

Exercice 3

- $\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 0^+} \ln x = -\infty \\ \\ \lim\limits_{x\to 0^+} -4x = 0 \end{array}\right\}$ Par somme, $\lim\limits_{x\to 0^+} \ln x - 4x = -\infty$

  Ainsi, $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = -\infty$

  $\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to +\infty} 2\ln(x) = +\infty \\ \\ \lim\limits_{x\to +\infty} -4x = -\infty \end{array}\right\}$ Par somme, on obtient une F.I. du type « $\infty - \infty$ ».

  En factorisant par x, on trouve : $\lim\limits_{x\to +\infty} 2\ln(x) - 4x = \lim\limits_{x\to +\infty} x\left(\frac{\ln x}{x} - 4\right)$.

  Or $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$

  A connaître

  Limite à connaître : $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$. Pensez que $\ln x$ part à l'infini mais très doucement, contrairement à x. Donc, on divise quelque chose de très petit par quelque chose de très grand.

  $\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to +\infty} \left(\frac{\ln x}{x} - 4\right) = -4 \\ \\ \lim\limits_{x\to +\infty} x = +\infty \end{array}\right\}$ Par produit $\lim\limits_{x\to +\infty} x\left(\frac{\ln x}{x} - 4\right) = -\infty$.

  Ainsi, $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = -\infty$.

- $\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 0^+} x^2 - 2x + 1 = 1 \\ \\ \lim\limits_{X\to 1} \ln X = 0 \end{array}\right\}$ Par composition, $\lim\limits_{x\to 0^+} \left(x^2 - 2x + 1\right) = 0$

  Ainsi, $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x) = 0$

$$x^2-2x+1=x^2\left(1-\frac{2x}{x^2}+\frac{1}{x^2}\right)=x^2\left(1-\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}\right).$$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x^2}=0\\ \lim\limits_{x\to+\infty}x^2=+\infty\end{array}\right\}\text{ Par produit, }\lim\limits_{x\to+\infty}x^2\left(1-\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}\right)=+\infty$$

Donc $\lim\limits_{x\to+\infty}x^2-2x+1=+\infty$.

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty}x^2-2x+1=+\infty\\ \lim\limits_{X\to+\infty}\ln X=+\infty\end{array}\right\}\text{ Par composition, }\lim\limits_{x\to+\infty}\ln(x^2-2x+1)=+\infty.$$

Ainsi, $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=+\infty$

- $$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to0^+}\ln(x)=-\infty\\ \lim\limits_{x\to0^+}\mathrm{e}^x=1\end{array}\right\}\text{Par quotient, }\lim\limits_{x\to0^+}h(x)=-\infty.$$

Donc, $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\ln x}{\mathrm{e}^x}=-\infty$.

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty}\ln(x)=+\infty\\ \lim\limits_{x\to+\infty}\mathrm{e}^x=+\infty\end{array}\right\}\text{On obtient une F.I. du type « }\frac{\infty}{\infty}\text{ ».}$$

Indétermination

Pour lever cette indétermination, on fait apparaître des limites connues : $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{\mathrm{e}^x}=0$.

On a $\frac{\ln(x)}{\mathrm{e}^x}=\frac{\ln(x)}{x}\times\frac{x}{\mathrm{e}^x}$.

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln(x)}{x}=0\\ \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{\mathrm{e}^x}=0\end{array}\right\}\text{Par produit, }\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln(x)}{x}\times\frac{x}{\mathrm{e}^x}=0.$$

Donc, $\lim\limits_{x\to+\infty}h(x)=0$.

Exercice 4

1. Résolution de l'équation $\left(\mathrm{e}^{2x}-4\right)\left(2\mathrm{e}^x-6\right)=0$

$$\begin{array}{rcl}\left(\mathrm{e}^{2x}-4\right)\left(2\mathrm{e}^x-6\right)&=&0\\ \mathrm{e}^{2x}-4=0&\text{ou}&2\mathrm{e}^x-6=0\\ \mathrm{e}^{2x}=4&\text{ou}&\mathrm{e}^x=3\\ \mathrm{e}^{2x}=\mathrm{e}^{\ln 4}&\text{ou}&\mathrm{e}^x=\mathrm{e}^{\ln 3}\\ 2x=\ln 4&\text{ou}&x=\ln 3\quad\text{On utilise }\mathrm{e}^x=\mathrm{e}^y\iff x=y.\\ x=\frac{\ln 4}{2}&\text{ou}&x=\ln 3\end{array}$$

Méthodes

On reconnaît une équation produit nul. On se ramène à des équations du type $\mathrm{e}^X=\mathrm{e}^Y$.

Remarque

On a aussi : $\frac{\ln 4}{2}=\frac{2\ln 2}{2}=\ln 2$.

2. On résout l'inéquation sur $]-1\,;+\infty[$ car $x+1>0$:

$$\begin{array}{rcl}
1-2\ln(x+1) & \geqslant & 5\\
-2\ln(x+1) & \geqslant & 4\\
\ln(x+1) & \leqslant & -2 \text{ On divise par } -2\\
\ln(x+1) & \leqslant & \ln(\mathrm{e}^{-2})\\
x+1 & \leqslant & \mathrm{e}^{-2}\\
x & \leqslant & \mathrm{e}^{-2}-1
\end{array}$$

Méthode

On se ramène à des inéquations du type $\ln X \leqslant \ln Y$ ou $\ln X \geqslant \ln Y$.

D'où $S = \left]-1\,;\,\mathrm{e}^{-2}-1\right]$.

ATTENTION

Attention à l'ensemble de solutions. N'oubliez pas que x doit être strictement supérieur à -1 !

3. Recherche du plus petit entier naturel.

$$\begin{array}{rcll}
12\times(0,8)^n+1 & < & 4 & \\
(0,8)^n & < & 0,25 & \\
\ln\left(0,8^n\right) & < & \ln(0,25) & \text{Car la fonction ln est strictement croissante sur }]0\ ;\ +\infty[.\\
n\ln(0,8) & < & \ln(0,25) & \text{Car } \ln a^n = n\ln a.\\
n & > & \dfrac{\ln(0,25)}{\ln(0,8)} & \text{Car } \ln 0,8 < 0.
\end{array}$$

D'ou $n=7$ car $\dfrac{\ln(0,25)}{\ln(0,8)} \simeq 6{,}21$.

4. On résout l'équation pour $x>0$ et $x>3$ donc sur $]3\,;\,+\infty[$:

$$\begin{array}{rcll}
\ln(x)+\ln(x-3) & = & 2\ln(2) & \\
\ln(x(x-3)) & = & \ln(2^2) & \text{Car } \ln x+\ln y=\ln(xy).\\
\ln(x^2-3x) & = & \ln(4) & \\
x^2-3x & = & 4 & \\
x^2-3x-4 & = & 0 &
\end{array}$$

Toujours pareil

On se ramène à une équation du type : $\ln X = \ln Y$.

$\Delta = (-3)^2-4\times1\times(-4)=25>0$. $x_1=\dfrac{3-5}{2}=-1<3$ et $x_2=\dfrac{3+5}{2}=4>3$.
L'équation $\ln(x)+\ln(x-3)=2\ln(2)$ admet qu'une seule solution : $x=4$.

Exercice 5

a. La fonction f est une somme de fonctions définies et dérivables sur $]0\,;\,+\infty[$ donc f est définie et dérivable sur $]0\,;\,+\infty[$.
Son premier terme est de la forme $u\times v$ avec $u(x)=x^2$, de dérivée $u'(x)=2x$ et $v(x)=\ln(x)$, de dérivée $v'(x)=\dfrac{1}{x}$.
Pour tout $x>0$,

$$\begin{array}{rcl}
f'(x) & = & \overbrace{2x}^{u'(x)}\times\overbrace{\ln(x)}^{v(x)}+\overbrace{x^2}^{u(x)}\times\overbrace{\dfrac{1}{x}}^{v'(x)}+3\\
 & = & 2x\ln x + x + 3 \quad \text{Car } x^2\times\dfrac{1}{x}=\dfrac{x^2}{x}=x.\\
 & = & x\left(2\ln(x)+1\right)+3
\end{array}$$

b. La fonction g est définie et dérivable sur $]0\,;\,+\infty[$ car elle est de la forme u^2 avec $u(x)=\ln(x)$ (u est dérivable sur $]0\,;\,+\infty[$), de dérivée $u'(x)=\dfrac{1}{x}$.

Pour tout $x>0$, $g'(x)=2u'(x)u(x)=2\times\dfrac{1}{x}\ln(x)=\dfrac{2\ln(x)}{x}$.

c. La fonction h est définie et dérivable sur $]0\,;\,+\infty[$ comme quotient de deux fonctions définies et dérivables sur $]0\,;\,+\infty[$ avec un dénominateur non nul sur cet intervalle.

h est de la forme $\dfrac{u}{v}$ avec $u(x)=\ln(x)$, de dérivée $u'(x)=\dfrac{1}{x}$ et $v(x)=x$, de dérivée $v'(x)=1$.

Pour tout $x>0$,

$$\begin{aligned}h'(x) &= \frac{\overbrace{\frac{1}{x}}^{u'(x)}\times\overbrace{x}^{v(x)}-\overbrace{\ln(x)}^{u(x)}\times\overbrace{1}^{v'(x)}}{\underbrace{x^2}_{(v(x))^2}}\\ &= \frac{1-\ln(x)}{x}\end{aligned}$$

Pensez-y !

$\dfrac{1}{x}\times x=\dfrac{x}{x}=1.$

d. La fonction k est de la forme $\ln(u)$ avec $u(x)=3x^2-2x+1$.

Or pour tout $x\in\mathbb{R}$, $u(x)>0$ car $\Delta=(-2)^2-4\times3\times1=-8<0$.

On en déduit que la fonction k est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

Pour tout $x\in\mathbb{R}$, $k'(x)=\dfrac{u'(x)}{u(x)}=\dfrac{6x-2}{3x^2-2x+1}$.