

---

## MATHÉMATIQUES

### Primitives et équations différentielles : entraînement 1

---

**Exercice 1**

*Cet exercice constitue une restitution organisée de connaissances.*

Soit l'équation différentielle :

$$(E) : y' = ay$$

où  $a$  est un nombre réel donné et  $y$  une fonction de la variable réelle  $x$ , dérivable sur  $\mathbb{R}$ .

- Vérifier que la fonction  $x \mapsto e^{ax}$  est solution de  $(E)$ .
- Démontrer que la solution générale de  $(E)$  est de la forme :

$$x \mapsto Ce^{ax}$$

où  $C$  est une constante réelle.

*Indication : on pourra considérer  $z = ye^{-ax}$  où  $y$  est solution de  $(E)$ .*

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

**Exercice 2****Partie A**

On considère les équations différentielles :

$$(E_0) : 4y' + y = 0$$

$$(E) : 4y' + y = -0,002t + 2,992$$

où  $y$  est une fonction numérique de la variable réelle  $t$ , dérivable sur  $\mathbb{R}$ , et  $y'$  sa fonction dérivée.

- Résoudre l'équation  $(E_0)$
- Déterminer les nombres réels  $a$  et  $b$  tels que la fonction  $g$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $g(t) = at + b$  soit une solution particulière de l'équation  $(E)$ .
- Démontrer que  $h$  est solution de  $(E)$  si, et seulement si,  $(h - g)$  est solution de  $(E_0)$ .
  - En déduire la solution générale de  $(E)$ .



## Exercice 3

Dans cet exercice, les résultats seront arrondis à  $10^{-2}$  près.

Une fibre optique est un fil très fin, en verre ou en plastique, qui a la propriété d'être un conducteur de la lumière et sert dans la transmission d'un signal véhiculant des données.

La puissance du signal, exprimée en milliwatts (mW), s'atténue au cours de la propagation.

On note  $P_E$  et  $P_S$  les puissances respectives du signal à l'entrée et à la sortie d'une fibre.

Pour une fibre de longueur  $L$  exprimée en kilomètres (km), la relation liant  $P_E$ ,  $P_S$  et  $L$  est donnée par :

$$P_S = P_E \times e^{-aL}$$

où  $a$  est le coefficient d'atténuation linéaire dépendant de la fibre.

Une entreprise utilise deux types de fibre optique de coefficients d'atténuation différents.

Dans tout l'exercice :

- la puissance du signal à l'entrée de la fibre est 7 mW ;
- à la sortie, un signal est détectable si sa puissance est d'au moins 0,08 mW ;
- pour rester détectable, un signal doit être amplifié dès que sa puissance devient strictement inférieure à 0,08 mW.

### Partie A

Le premier type de fibre de longueur 100 km utilisé par l'entreprise a un coefficient d'atténuation linéaire  $a = 0,046$ .

Pour ce type de fibre, sera-t-il nécessaire de placer au moins un amplificateur sur la ligne pour que le signal soit détectable en sortie ?

### Partie B

La puissance du signal le long du second type de fibre est modélisée par une fonction  $g$  de la variable  $x$ , où  $x$  étant la distance en kilomètres parcourue par le signal depuis l'entrée de la fibre. On admet que cette fonction  $g$  est définie et dérivable sur l'intervalle  $[0 ; +\infty[$  et qu'elle est solution sur cet intervalle de l'équation différentielle

$$y' + 0,035y = 0.$$

1. Résoudre l'équation différentielle  $y' + 0,035y = 0$ .
2. a. Sachant que  $g(0) = 7$ , vérifier que la fonction  $g$  est définie sur l'intervalle  $[0 ; +\infty[$  par  $g(x) = 7e^{-0,035x}$ .  
b. En déduire le coefficient d'atténuation de cette fibre.
3. a. Étudier le sens de variation de la fonction  $g$ .  
b. Déterminer la limite de la fonction  $g$  en  $+\infty$ .
4. a. Le signal sera-t-il encore détecté au bout de 100 km de propagation ?  
b. Déterminer la longueur maximale de la fibre permettant une détection du signal à la sortie sans amplification.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

