MATHEMATIQUES
Primitives et équations différentielles : entraînement 1 (corrigé)

Exercice 1

Si $y(x) = \mathrm{e}^{ax}$ alors $y'(x) = a\mathrm{e}^{ax}$ et $y'(x) = a\,y(x)$ d'où le résultat.

A savoir

Cette démonstration fait partie des démonstrations exigibles du programme.

Si $z = y\mathrm{e}^{-ax}$ alors $z' = y'\mathrm{e}^{-ax} - ay\mathrm{e}^{-ax} = (y' - ay)\mathrm{e}^{-ax}$. On déduit :

$$\begin{aligned} y \text{ solution de } (E) \ &\underline{ssi}\ z' = 0 \\ &\underline{ssi}\ z = C,\ C \in \mathbb{R} \\ &\underline{ssi}\ y = z\mathrm{e}^{ax} = C\mathrm{e}^{ax} \end{aligned}$$

Explications

Si $z = y\mathrm{e}^{-ax}$ alors $y = z\mathrm{e}^{ax}$ et comme $z = C$, alors $y = C\mathrm{e}^{ax}$

Finalement, la solution générale de (E) est bien de la forme :

$$x \longmapsto C\mathrm{e}^{ax},\ C \in \mathbb{R}$$

Exercice 2

Partie A

1. La solution générale de (E_0) est de la forme $x \longmapsto C\mathrm{e}^{-\frac{t}{4}},\ C \in \mathbb{R}$

2. $g'(t) = a$ et $4g'(t) + g(t) = at + 4a + b$. On déduit :

Pour tout réel t, $4g'(t) + g(t) = -0,002t + 2,992$ $\underline{ssi}$ $\begin{cases} a = -0,002 \\ 4a + b = 2,992 \end{cases}$ $\underline{ssi}$ $\begin{cases} a = -0,002 \\ b = 3 \end{cases}$

La fonction affine g solution de (E) est définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(t) = -0,002t + 3$$

3. a. On a successivement :

$$\begin{aligned} h - g \text{ solution de } (E_0) \ &\underline{ssi}\ 4(h-g)' + (h-g) = 0 \\ &\underline{ssi}\ 4h' - 4g' + h - g = 0 \\ &\underline{ssi}\ 4h' + h = 4g' + g \\ &\underline{ssi}\ 4h' + h = -0,002t + 2,992 \\ &\underline{ssi}\ h \text{ solution de } (E) \end{aligned}$$

b. On a successivement :

$$\begin{aligned} h \text{ solution de } (E) \ &\underline{ssi}\ (h-g) \text{ solution de } (E_0) \\ &\underline{ssi}\ \forall t \in \mathbb{R},\ h(t) - g(t) = C\mathrm{e}^{-\frac{t}{4}} \\ &\underline{ssi}\ \forall t \in \mathbb{R}, h(t) = g(t) + C\mathrm{e}^{-\frac{t}{4}} \\ &\underline{ssi}\ \forall t \in \mathbb{R}, h(t) = 3 - 0,002t + C\mathrm{e}^{-\frac{t}{4}} \end{aligned}$$

Le cours

(E) est une équation différentielle du type $y' = ay + f$.
Toute solution de cette équation est la somme d'une solution particulière de l'équation (E) (comme la fonction g) et d'une solution quelconque de l'équation $y' = ay$, c'est-à-dire de l'équation (E_0).

On en déduit que les solutions de (E) sont les fonctions h définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$h(t) = 3 - 0,002t + C\mathrm{e}^{-\frac{t}{4}} \text{ avec } C \in \mathbb{R}$$

Partie B

1. Si q est solution de (E), alors $q(0) = 3 + C = 0$ <u>*ssi*</u> $C = -3$ donc pour tout $t \in \mathbb{R}_+$:

$$q(t) = 3 - 0,002t - 3\mathrm{e}^{-\frac{t}{4}}$$

2. a. La fonction q est dérivable sur $[0\,;1440]$ comme somme de fonctions dérivables sur $[0\,;1440]$.

$q'(t) = -0,002 - 3 \times \left(-\dfrac{1}{4}\right) \times \mathrm{e}^{-\frac{t}{4}} = -0,002 + \dfrac{3}{4}\mathrm{e}^{-\frac{t}{4}}$.

La fonction q' est dérivable sur $[0\,;1440]$ comme somme de fonctions dérivables sur $[0\,;1440]$.

$q''(t) = \dfrac{3}{4} \times \left(-\dfrac{1}{4}\right) \times \mathrm{e}^{-\frac{t}{4}} = -\dfrac{3}{16}\mathrm{e}^{-\frac{t}{4}} < 0$

Variations

Attention, ce sont les variations de q' que l'on veut. Pour cela il nous faut le signe de la dérivée seconde.
La dérivée de e^u est $u'\mathrm{e}^u$. N'oubliez pas que la dérivée de $t \mapsto -\dfrac{t}{4}$ est $t \mapsto -\dfrac{1}{4}$

On en déduit le tableau de variations de la fonction q' :

t	0		α		1440
$q''(t)$				$-$	
$q'(t)$	$q'(0) = 0{,}748$	$\searrow$	0	$\searrow$	$q'(1440) \simeq -0{,}002$

Sur $[0\,;1440]$,
- q' est continue ;
- q' est strictement décroissante ;
- 0 est une valeur intermédiaire entre $q'(1440)$ et $q'(0)$.

D'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $q'(t) = 0$ admet une unique solution α sur $[0\,;1440]$.

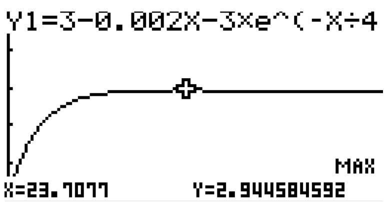
b. Tableau de variations de la fonction q :

t	0		α		1440
$q'(t)$		$+$	0	$-$	
$q(t)$	$q(0)$	$\nearrow$	$q(\alpha)$	$\searrow$	$q(1440)$

Variations

C'est le tableau de variations de la fonction q' qui permet d'avoir son signe.

3. La quantité de principe actif est maximale lorsque $t = \alpha$ soit $t = 24$ mn à la minute près par excès.



Exercice 3

Partie A

Pour ce type de fibre, il sera nécessaire de placer au moins un amplificateur sur la ligne pour que le signal soit détectable en sortie.

En effet, calculons $P_S(100)$ pour $a = 0{,}046$:

$$7 \times \mathrm{e}^{-0{,}046\times 100} \approx 0{,}070\,3$$

Le signal à la sortie n'est pas détectable car inférieur à 0,08 mW.

Partie B

1. Résolvons l'équation différentielle (E) : $y' + 0,035y = 0$.
Les solutions de l'équation différentielle $y' + ay = 0$ sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions y définies par :

$$y(x) = C\mathrm{e}^{-ax} \text{ où } C \text{ est une constante quelconque.}$$

$a = 0{,}035$. Les solutions de (E) sont les fonctions définies par $y(t) = C\mathrm{e}^{-0{,}035t}$.

2. a. Sachant que $g(0) = 7$, vérifions que la fonction g est définie sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$ par :

$$g(x) = 7\mathrm{e}^{-0{,}035x}$$

Pour ce faire, déterminons la valeur de C.
$y(0) = C\mathrm{e}^{-0{,}035\times 0} = C = 7$.

Par conséquent la fonction g solution de (E) vérifiant la condition initiale est définie par :

$$g(x) = 7\mathrm{e}^{-0{,}035x} \text{ pour tout } x \text{ de } [0\ ,\ +\infty[$$

b. On a $\underbrace{g(x)}_{P_S} = \underbrace{7}_{P_E}\,\mathrm{e}^{-\overbrace{0{,}035}^{a}\,x}$.

Le coefficient d'atténuation de cette fibre est 0,035.

Explications

C'est l'écriture même de la fonction g qui donne le coefficient d'atténuation. On l'obtient par identification des coefficients.

3. a. Étudions le sens de variation de la fonction g.
La fonction dérivée est définie par $g'(x) = 7 \times \left(-0{,}035\mathrm{e}^{-0{,}035x}\right) = -0{,}245\mathrm{e}^{-0{,}035x}$.
Pour tout $x \in [0\ ,\ +\infty[$, $\quad g'(x) < 0$ comme produit d'un réel strictement négatif et d'un réel strictement positif.
Si pour tout $x \in I$, $f'(x) < 0$ alors la fonction f est strictement décroissante sur I.
Pour tout $x \in [0\ ,\ +\infty[$, $\quad g'(x) < 0$ par conséquent la fonction g est strictement décroissante sur $[0\ ,\ +\infty[$.

x	0		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	
$g(x)$	7	$\searrow$	0

b. Déterminons la limite de la fonction g en $+\infty$.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to+\infty} \overbrace{-0,035x}^{X} = -\infty \\ \lim\limits_{X\to-\infty} \mathrm{e}^{X} = 0 \end{array}\right\} \text{Par composition, } \lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{-0,035x} = 0$$

Par produit, $\lim\limits_{x\to+\infty} 7\mathrm{e}^{-0,035x} = 0$

Ainsi, $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 0$

4. a. Pour savoir si le signal sera encore détecté au bout de 100 km de propagation, on calcule $g(100)$.

$g(100) = 7\mathrm{e}^{-0,035\times100} \approx 0{,}211\,4 > 0,08$. Il sera donc possible de détecter le signal.

b. Pour déterminer la longueur maximale de la fibre permettant une détection du signal à la sortie sans amplification, on résout $g(x) < 0{,}08$.

$$\begin{array}{rcl} 7\mathrm{e}^{-0{,}035x} & < & 0{,}08 \\ \mathrm{e}^{-0{,}035x} & < & 0{,}011\,428\,57 \\ \mathrm{e}^{-0{,}035x} & < & \mathrm{e}^{\ln(0{,}011\,428\,57)} \\ -0{,}035x & < & \ln 0{,}011\,428\,57 \\ x & > & -\dfrac{\ln 0{,}011\,428\,57}{0{,}035} \quad \text{Attention } -0,035 < 0 \\ x & > & 127{,}76 \text{ à } 10^{-2} \text{près.} \end{array}$$

Méthode

On se ramène à une inéquation du type $\mathrm{e}^{X} < \mathrm{e}^{Y}$.
Pour cela, on utilise les propriétés :
- Pour tout $x > 0$, $x = \mathrm{e}^{\ln(x)}$.
- $\mathrm{e}^{X} < \mathrm{e}^{Y} \iff X < Y$.

La longueur maximale de la fibre permettant une détection est d'environ 127,76 km.