MATHEMATIQUES
Primitives et équations différentielles : entraînement 2

Exercice 1

loi de refroidissement de Newton

La loi de refroidissement de Newton s'énonce ainsi : *"la vitesse de refroidissement d'un corps inerte est proportionnelle à la différence de température entre ce corps et le milieu ambiant"*.

Autrement dit, si $f(t)$ désigne la température d'un corps inerte à l'instant t et T désigne la température du milieu ambiant (T est supposée constante), on a :

$$f'(t) = a(T - f(t))$$

où a désigne une constante dépendant des conditions expérimentales.

Dans tout le problème, le temps t est exprimé en minutes.

1. Dans une cuisine, il fait 20°C. A l'instant $t = 0$, on verse dans le bol de Nabolos de la soupe à 60°C.
On note $f(t)$ la température de la soupe après t minutes.
Exprimer $f(t)$ en fonction de t et de a.

2. Au bout de 2 minutes, Nabolos n'a toujours pas bu sa soupe qui est maintenant à la température de 45°C
Calculer la valeur de la constante a. (on arrondira à 10^{-3} près)

3. Sachant que Nabolos ne boit sa soupe que lorsque sa température passe en dessous de 25°C, combien de temps ses parents devront-ils attendre avant que leur enfant commence à boire sa soupe ? (arrondir à la minute)

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

Exercice 2

Partie A : modélisation

On s'intéresse à la chute d'un parachutiste, avant l'ouverture du parachute.
On admet que la vitesse V du parachutiste pendant la chute peut être modélisée par une fonction solution de l'équation différentielle :

$$my'(t) + ky(t) = mg$$

où m est la masse totale du parachutiste et de son parachute, k est un coefficient dépendant de la résistance de l'air, g est le coefficient de l'accélération de la pesanteur et t représente le temps.
V est exprimée en m.s^{-1}, m est exprimée en kilogramme et t est exprimé en seconde.
Dans la suite du problème, on considère que $m = 80$ kg, $k = 25$ unités S. I. et $g = 10$ m.s^{-2}.
Au début de la chute, $t = 0$ s et $V(0) = 0$ m s^{-1}.

1. Montrer que la fonction V est solution de l'équation différentielle

$$(E) : \quad y' + 0{,}312\,5y = 10.$$

2. Résoudre l'équation différentielle :

$$(E_0) : \quad y' + 0{,}312\,5y = 0.$$

3. Déterminer une fonction constante solution de (E).

4. En déduire les solutions générales de (E).

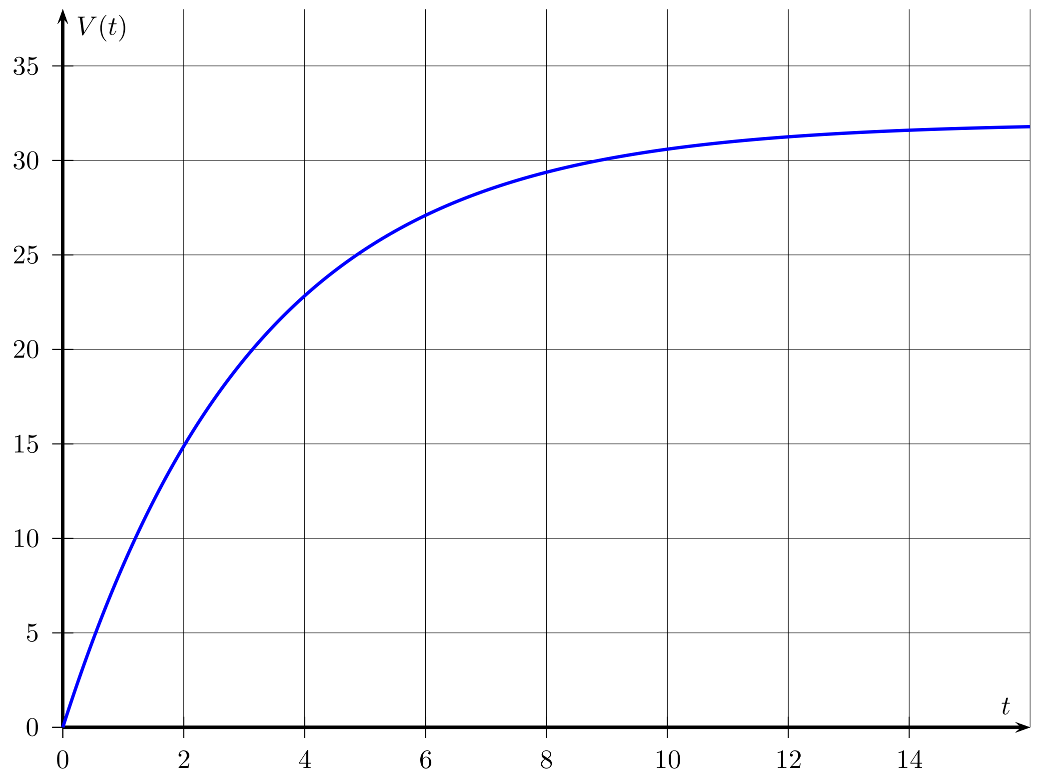
5. Déterminer une expression de la vitesse $V(t)$ du parachutiste à l'instant t.

Partie B : étude de la chute

On admet que la vitesse du parachutiste est modélisée par la fonction V de la variable t définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par :

$$V(t) = 32\left(1 - \mathrm{e}^{-0{,}312\,5t}\right).$$

On donne ci-dessous la représentation graphique Γ de cette fonction V dans un repère orthogonal.



1. **a.** Estimer une valeur arrondie de l'instant t_0 à partir duquel la vitesse dépasse 20 m.s^{-1}.

   b. Retrouver par le calcul la valeur exacte de t_0.

2. **a.** Donner l'expression $V'(t)$ de la dérivée de la vitesse.

   b. Calculer $\lim\limits_{t \to +\infty} V(t)$.

   c. Dresser le tableau de variations de V sur $[0\ ;\ +\infty[$.

3. Le parachutiste peut-il atteindre une vitesse de 130 km.h^{-1} ?

4. La valeur moyenne d'une fonction f sur un intervalle $[a\ ;\ b]$ est $\dfrac{1}{b-a}(F(b) - F(a))$ avec F une primitive de f.
   Calculer la vitesse moyenne du parachutiste lors des deux premières secondes de chute. On pourra arrondir à l'unité.

Exercice 3

Dans cet exercice, la température est exprimée en degrés Celsius (°C) et le temps t est exprimé en heures.
Une entreprise congèle des ailerons de poulet dans un tunnel de congélation avant de les conditionner en sachets.
À l'instant $t = 0$, les ailerons, à une température de 5 °C, sont placés dans le tunnel. Pour pouvoir respecter la chaîne du froid, le cahier des charges impose que les ailerons aient une température inférieure ou égale à -24 °C.

Partie A

La température des ailerons dans le tunnel de congélation est modélisée en fonction du temps t par la fonction f définie sur l'intervalle $[0, +\infty[$ par $f(t) = 35\mathrm{e}^{-1,6t} - 30$.

1. Déterminer la température atteinte par les ailerons au bout de 30 minutes, soit 0,5 h.

2. Étudier le sens de variation de la fonction f.

3. Si les ailerons de poulet sont laissés une heure et demie dans le tunnel de congélation, la température des ailerons sera-t-elle conforme au cahier des charges ?

4. Résoudre par le calcul l'équation $f(t) = -24$ et interpréter le résultat trouvé.

Partie B

Pour moderniser son matériel, l'entreprise a investi dans un nouveau tunnel de congélation.
La température des ailerons dans ce nouveau tunnel est modélisée, en fonction du temps, par une fonction g définie et dérivable sur l'intervalle $[0, +\infty[$, qui est solution de l'équation différentielle $y' + 1,5y = -52,5$

1. Résoudre l'équation différentielle $y' + 1,5y = -52,5$.

2. **a.** Justifier que $g(0) = 5$.

b. Vérifier que la fonction g est définie par $g(t) = 40\mathrm{e}^{-1,5t} - 35$.

3. Ce nouveau tunnel permet-il une congélation plus rapide ?