MATHEMATIQUES
Primitives et équations différentielles : entraînement 2 (corrigé)

Exercice 1

1. L'équation différentielle (E) : $f'(t) = a(T - f(t))$ s'écrit $f'(t) = -af(t) + aT$.
D'après l'énoncé, $T = 20$ et donc on obtient $f'(t) = -af(t) + 20a$.

On reconnaît une équation différentielle de la forme $y' = ky + b$ avec $k = -a$ et $b = 20a$.

Méthode

Dans un premier temps, on ramène l'écriture de cette équation à celle d'un type connu. Ici : $y' = ay + b$.
Pour résoudre ce type d'équation, on cherche la fonction constante solution. Les solutions de l'équation sont données par la somme de cette fonction constante et d'une solution quelconque de l'équation $y' = ay$.

- On cherche la solution particulière p constante de (E). On a donc $p(t) = k$, avec $k \in \mathbb{R}$.

Puisque p est solution de (E), on a $p'(t) = -ap(t) + 20a$, et comme $p'(t) = 0$, on a $-ap(t) + 20a = 0$, et donc $p(t) = 20$.

On peut le savoir

Pour les équations différentielles de la forme $y' = ay + b$, la solution particulière constante est $t \longmapsto -\frac{b}{a}$. Ici, $-\frac{b}{a} = -\frac{-20a}{-a} = 20$.
Les solutions sont les fonctions de la forme $t \longmapsto Ce^{at} - \frac{b}{a}$ avec $C \in \mathbb{R}$.

- L'équation différentielle $f'(t) = -af(t)$ est de la forme $y' = ky$ avec $k = -a$. Donc elle admet pour solutions les fonctions $t \longmapsto C\mathrm{e}^{kt}$, avec $C \in \mathbb{R}$, soit $t \longmapsto C\mathrm{e}^{-at}$ puisque $k = -a$.

- On en déduit que les solutions de (E) sont les fonctions f de la forme $f(t) = C\mathrm{e}^{-at} + 20$ avec $C \in \mathbb{R}$.
Puisqu'à l'instant $t = 0$, la soupe est à 60°C, on a $f(0) = 60$ qui se traduit par $C\mathrm{e}^{-a\times 0}+20 = 60$, soit $C = 40$.

On en déduit que $f(t) = 40\mathrm{e}^{-at} + 20$.

2. On a $f(2) = 45$. Cette égalité se traduit par $40\mathrm{e}^{-2a} + 20 = 45$.

$$\begin{aligned}
40\mathrm{e}^{-2a} + 20 &= 45 \\
40\mathrm{e}^{-2a} &= 25 \\
\mathrm{e}^{-2a} &= 0,625 \\
\mathrm{e}^{-2a} &= \mathrm{e}^{\ln(0,625)} \\
-2a &= \ln(0,625) \\
a &= -\frac{\ln(0,625)}{2} \simeq 0,235
\end{aligned}$$

Ainsi $f(t) = 40\mathrm{e}^{-0,235t} + 20$

3. On cherche t de façon que $f(t) < 25$.

$$\begin{array}{rcl} 40\mathrm{e}^{-0,235t} + 20 & < & 25 \\ 40\mathrm{e}^{-0,235t} & < & 5 \\ \mathrm{e}^{-0,235t} & < & 0,125 \\ \mathrm{e}^{-0,235t} & < & \mathrm{e}^{\ln(0,125)} \\ -0,235t & < & \ln(0,125) \\ t & > & \dfrac{\ln(0,125)}{-0,235} \simeq 8,8 \end{array}$$

Ses parents devront attendre environ 8,8 minutes.

Exercice 2

1. En utilisant les données de l'énoncé, l'équation différentielle $my'(t) + ky(t) = mg$ devient :

$$80y'(t) + 25y(t) = 80 \times 10$$

En divisant par 80, on obtient :

$$y'(t) + 0,3125y(t) = 10$$

2. L'équation (E_0) est une équation différentielle du type $y' = ay$ avec $a = -0,3125$.
Les solutions de (E_0) sont les fonctions $t \longmapsto C\mathrm{e}^{-0,1325t}$ avec $C \in R$.

3. On cherche une fonction constante p solution de (E).
On a $p'(t) + 0,3125p(t) = 10$ et puisque $p(t) = k$ et $p'(t) = 0$, on obtient $k = \dfrac{10}{0,3125} = 32$.

La fonction particulière constante solution de (E) est la fonction p définie par $p(t) = 32$.

4. Toute solution de (E) est donnée par la somme de la fonction particulière constante de (E) et d'une solution quelconque de (E_0).
Ainsi, les solutions générales de (E) sont les fonctions V définies par $V(t) = C\mathrm{e}^{-0,3125t} + 32$ avec $C \in \mathbb{R}$.

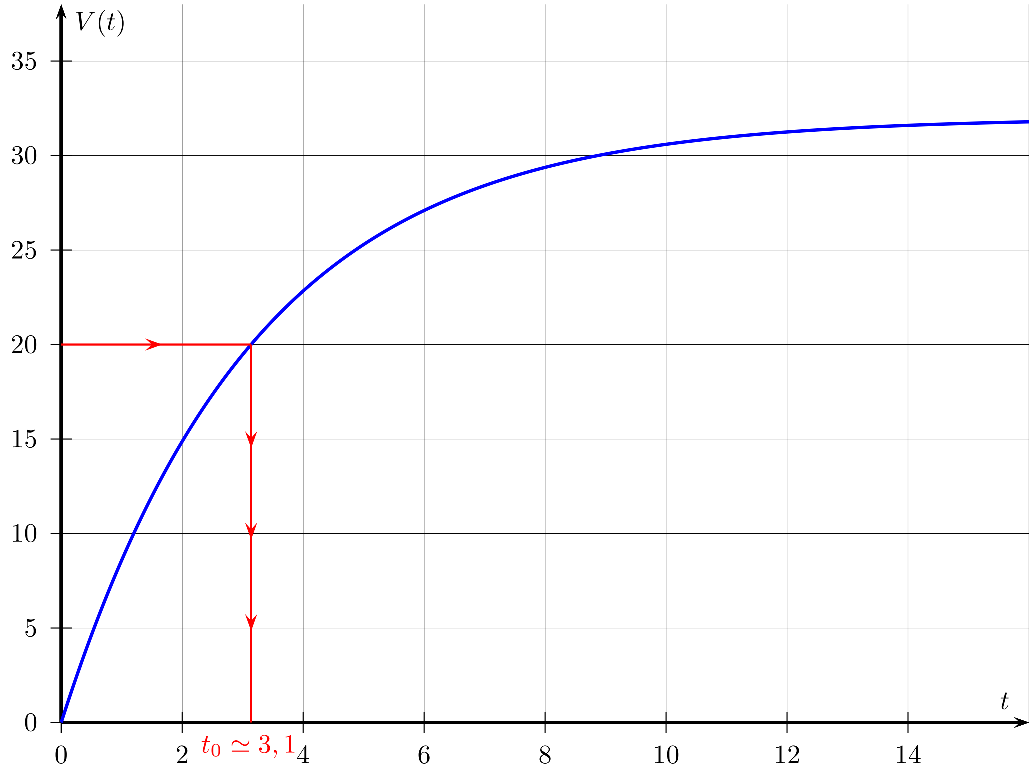
5. On cherche parmi les fonctions V, celle qui vérifie $V(0) = 0$.
L'égalité $C\mathrm{e}^{-0,3125\times 0} + 32 = 0$ donne $C = -32$.

On en déduit que la fonction V est définie par :

$$V(t) = -32\mathrm{e}^{-0,3125t} + 32 = 32\left(1 - \mathrm{e}^{-0,3125t}\right)$$

Partie B : étude de la chute

1. a. Lecture graphique.



Graphiquement, $t_0 \simeq 3,1$.

b. Il s'agit de résoudre $32\left(1-\mathrm{e}^{-0,1325t}\right) > 20$.

$$\begin{array}{rcl}
32\left(1-\mathrm{e}^{-0,1325t}\right) & > & 20 \\
1-\mathrm{e}^{-0,3125t} & > & 0,625 \\
-\mathrm{e}^{-0,3125t} & > & -0,375 \\
\mathrm{e}^{-0,3125t} & < & 0,375 \\
\mathrm{e}^{-0,3125t} & < & \mathrm{e}^{\ln(0,375)} \\
-0,3125t & < & \ln(0,375) \\
t & > & \dfrac{\ln(0,375)}{-0,3125} \simeq 3,14
\end{array}$$

La valeur exacte de t_0 est $\dfrac{\ln(0,375)}{-0,3125}$.

Valeur approchée

$3,14$ est une valeur approchée de t_0.

2. a. La fonction V est dérivable sur $[0~;~+\infty[$.

Pour tout réel t de $[0~;~+\infty[$,

$$V'(t) = -32 \times (-0,3125)\mathrm{e}^{-0,3125t} = 10\mathrm{e}^{-0,3125t}$$

Conseil

Pour calculer la dérivée de V, choisissez la forme $V(t) = -32\mathrm{e}^{-0,3125t}+32$ plutôt que $V(t) = 32\left(1-\mathrm{e}^{-0,3125t}\right)$. Ce n'est qu'un conseil !

b. Calcul de la limite de V en $+\infty$.

$$\left.\begin{array}{l}
\displaystyle\lim_{t\to+\infty} \overbrace{-0,3125}^{T} = -\infty \\
\displaystyle\lim_{T\to-\infty} \mathrm{e}^{T} = 0
\end{array}\right\} \text{ Par composition, } \lim_{t\to+\infty} \mathrm{e}^{-0,312\,5t} = 0$$

Par produit et somme , $\lim\limits_{t\to+\infty} -32\text{e}^{-0,3125t}+32=32$

Ainsi, $\lim\limits_{t\to+\infty} V(t)=32$

c. Tableau de variations de V :

t	0	$+\infty$
$V'(t)$	$+$	
$V(t)$	0	32

3. 130 km/h= 130×1000 m/h $= 130000\div 3600$ m/s $\simeq 36,1$ m/s.

D'après le tableau de variations, $V(t)<32$. On en déduit que le parachutiste n'atteindra pas la vitesse de 36,1 m/s.

4. On cherche une primitive F de la fonction V.

$V(t)=-32\text{e}^{-0,3125t}+32$.
On a $V(t)=(-0,3125)\text{e}^{-0,3125t}\times 102,4+32$.

> **102,4**
> Mais d'où vient-il ? et pourquoi ?
> On fait apparaître la forme $u'\text{e}^u$ c'est-à-dire $-0,3125\text{e}^{-0,3125t}$. Pour cela on cherche k tel que $k\times(-0,3125)=-32$ d'où $k=102,4$.

Ainsi, $F(t)=102,4\text{e}^{-0,3125t}+32t$.
La vitesse moyenne du parachutiste lors des des deux premières secondes de chute est :

$$\frac{1}{2-0}\left(F(2)-F(0)\right)=\frac{1}{2}\left(F(2)-F(0)\right)$$

$F(2)=102,4\text{e}^{-0,3125\times 2}+32\times 2=64+102,4\text{e}^{-0,625}$.

$F(0)=102,4\text{e}^{-0,3125\times 0}+32\times 0=102,4$.

$\frac{1}{2}\left(F(2)-F(0)\right)=\frac{1}{2}\left(64+102,4\text{e}^{-0,625}-102,4\right)\simeq 8,2$ m/s.

La vitesse moyenne du parachutiste lors des des deux premières secondes de chute est d'environ 8 m/s.

Exercice 3

Partie A :

1. $f(0,5)=35\text{e}^{-0,8}-30\approx -14$ °C.
Au bout de 30 minutes, la température atteinte par les ailerons est environ -14 °C.

2. La fonction f est dérivable sur $[0\ ;\ +\infty[$ et pour tout $t\in[0\ ;\ +\infty[$,$f'(t)=-1,6\times 35\text{e}^{-1,6t}+0=-56\text{e}^{-1,6t}$.

Or $\forall t\in[0\ ;\ +\infty[$, $\text{e}^{-1,6t}>0$ et $-56<0$ donc $f'(t)<0$ sur $[0\ ;\ +\infty[$. La fonction f est décroissante sur $[0\ ;\ +\infty[$.

De plus,

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{t\to+\infty} \overbrace{-1,6t}^{T} = -\infty \\ \lim\limits_{T\to-\infty} \mathrm{e}^{T} = 0\end{array}\right\} \text{ Par composition, } \lim\limits_{t\to+\infty} \mathrm{e}^{-1,6t} = 0$$

Par produit et somme , $\lim\limits_{t\to+\infty} 35\mathrm{e}^{-1,6t} - 30 = -30$

Ainsi, $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t) = -30$

t	0	$+\infty$
$f'(t)$	$-$	
$f(t)$	5	-30

3. $f(1,5) = 35\mathrm{e}^{-2,4} - 30 \approx -27$ °C.

La température des ailerons sera conforme au cahier des charges.

4. Résolution de l'équation $f(t) = -24$

$$\begin{array}{rcl}
f(t) & = & -24 \\
35\mathrm{e}^{-1,6t} - 30 & = & -24 \\
35\mathrm{e}^{-1,6t} & = & 6 \\
\mathrm{e}^{-1,6t} & = & \dfrac{6}{35} \\
\ln\left(\mathrm{e}^{-1,6t}\right) & = & \ln\left(\dfrac{6}{35}\right) \\
-1,6t & = & \ln\left(\dfrac{6}{35}\right) \\
t & = & -0,625\ln\left(\dfrac{6}{35}\right) \simeq 1,10
\end{array}$$

Les ailerons atteignent la température de -24 °C au bout de 1 h et 6 min.

Partie B :

$\forall t \in [0\ ;\ +\infty[$ on a $y' + 1,5y = -52,5$.

1. Cette équation différentielle est de la forme $y = ay + b$ avec $a = -1,5$ et $b = -52,5$.

Les solutions de cette équation sont les fonctions : $t \longmapsto K\mathrm{e}^{-1,5t} - \dfrac{52,5}{1,5}$ soit $t \longmapsto K\mathrm{e}^{-1,5t} - 35$.

On peut le savoir

Pour les équations différentielles de la forme $y' = ay + b$, la solution particulière constante est $x \longmapsto -\dfrac{b}{a}$.
Les solutions sont les fonctions de la forme $x \longmapsto C\mathrm{e}^{ax} - \dfrac{b}{a}$ avec $C \in \mathbb{R}$.

2. a. À l'instant $t = 0$, les ailerons, à une température de 5 °C, sont placés dans le tunnel donc $g(0) = 5$.

b. L'égalité $g(0)=5$ se traduit par $K\mathrm{e}^0-35=5$, d'où $K=35+5=40$.

Ainsi, $g(t)=40\mathrm{e}^{-1,5t}-35$.

3. Résolution de l'équation $g(t)=-24$.

$$\begin{array}{rcl} g(t) & = & -24 \\ 40\mathrm{e}^{-1,5t}-35 & = & -24 \\ 40\mathrm{e}^{-1,5t} & = & 11 \\ \mathrm{e}^{-1,5t} & = & 0,275 \\ \mathrm{e}^{-1,5t} & = & \mathrm{e}^{\ln(0,275)} \\ -1,5t & = & \ln(0,275) \\ t & = & \dfrac{\ln(0,275)}{-1,5} \end{array}$$

$\dfrac{\ln(0,275)}{-1,5}\approx 0{,}86$ h soit environ 52 min..
Les ailerons atteignent la température de -24 ˚C au bout de 52 min.
Le tunnel permet une congélation plus rapide.