MATHEMATIQUES

Primitives et équations différentielles : savoir-faire 2 (corrigé)

Exercice 1

Cette équation est équivalente à $y' = 3y$.
D'après le cours, les solutions sont les fonctions de la forme :

$$x \longmapsto C\mathrm{e}^{3x}$$

avec C une constante réelle.

Méthode

On change l'écriture de cette équation pour se ramener à une équation de référence :

$$y' = ay$$

Exercice 2

Cette équation est équivalente à $y' = \frac{1}{3}y - \frac{1}{3}$.

Méthode

Dans un premier temps, on ramène l'écriture de cette équation à celle d'un type connu. Ici : $y' = ay + b$.
Pour résoudre ce type d'équation, on cherche la fonction constante solution. Les solutions de l'équation sont données par la somme de cette fonction constante et d'une solution quelconque de l'équation $y' = ay$.

- On cherche la solution particulière constante de l'équation de la forme $c(x) = k$.

On a $c'(x) = \frac{1}{3}c(x) - \frac{1}{3}$ pour tout réel x et puisque $c'(x) = 0$, on a $c(x) = 1$.

La fonction constante solution de l'équation $y' = \frac{1}{3}y - \frac{1}{3}$ est la fonction c définie par $c(x) = 1$.

On peut le savoir

Pour les équations différentielles de la forme $y' = ay + b$, la solution particulière constante est $x \longmapsto -\frac{b}{a}$.
Les solutions sont les fonctions de la forme $x \longmapsto C\mathrm{e}^{ax} - \frac{b}{a}$ avec $C \in \mathbb{R}$.

- On résout l'équation $y' = \frac{1}{3}y$.

Les solutions sont les fonctions de la forme :

$$x \longmapsto C\mathrm{e}^{\frac{1}{3}x}$$

avec C une constante réelle.

- On en déduit que les solutions de l'équation $y' = \frac{1}{3}y - \frac{1}{3}$ sont les fonctions g définies par :

$$g(x) = C\mathrm{e}^{\frac{1}{3}x} + 1 \text{ avec } C \in \mathbb{R}$$

Par exemple

Par exemple la fonction $x \longmapsto 2021\mathrm{e}^{\frac{1}{3}x} + 1$ est une solution de l'équation.

- On cherche la fonction qui vérifie $g(1) = 0$.

Cette condition se traduit par : $C\mathrm{e}^{\frac{1}{3}\times 1} + 1 = 0$ soit $C = -\mathrm{e}^{-\frac{1}{3}}$.
La fonction f est donc définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = -\mathrm{e}^{-\frac{1}{3}} \times \mathrm{e}^{\frac{1}{3}x} + 1 = -\mathrm{e}^{\frac{1}{3}x - \frac{1}{3}} + 1$$

Exercice 3

1. La fonction g est une solution de (E) si et seulement si $g'(x) = g(x) + x - 3$.
Or, $g'(x) = -1$ et $g(x) + x - 3 = -x + 2 + x - 3 = -1$. On en déduit que l'égalité est bien vérifiée. Par conséquent, la fonction g est solution de l'équation différentielle (E).

2. L'équation différentielle $y' = y$ est de la forme $y' = ay$ avec $a = 1$.

Les fonctions solutions de cette équation sont de la forme $x \longmapsto C\mathrm{e}^x$, où C est une constante réelle.

Méthode

(E) est une équation différentielle du type $y' = ay + f$.
Toute solution de cette équation est la somme d'une solution particulière de l'équation (E) et d'une solution quelconque de l'équation $y' = ay$.

Par conséquent, les solutions de (E) sont de la forme $f(x) = C\mathrm{e}^x - x + 2$, avec C réel quelconque.