MATHEMATIQUES
Raisonnement par récurrence : entraînement

Exercice 1

On considère la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{4}x + 1$ et la suite (u_n) définie par $u_0 = 3$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = f(u_n)$.

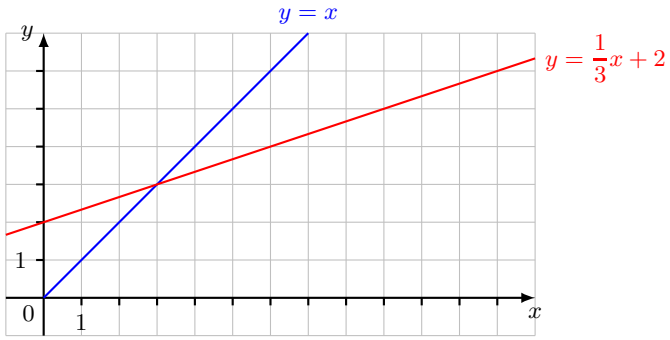
1. Étudier le sens de variation de f sur $[1\ ;\ 3]$.

2. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $1 \leqslant u_n \leqslant 3$.

3. Démontrer que la suite (u_n) est décroissante.

Exercice 2

On a représenté ci-dessous la suite définie par $u_0 = 12$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + 2$.



1. En utilisant ce graphique, conjecturer le sens de variation de la suite (u_n).

2. Démontrer la conjecture par récurrence.

Exercice 3

Soit la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$u_0 = 1 \text{ et, pour tout entier naturel } n,\ u_{n+1} = 2u_n + 1 - n.$$

1. En utilisant la calculatrice, compléter le tableau ci-dessous :

n	0	1	2	3	4	5
u_n						
$u_n - n$						

2. Quelle conjecture peut-on faire à partir des résultats de ce tableau ?

3. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $u_n = 2^n + n$.

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

Exercice 4

(S_n) est la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$.

1. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, $S_n = \dfrac{n}{n+1}$.

2. **a.** Démontrer que pour tout entier $k \geqslant 1$,

$$\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$$

b. Retrouver le résultat de la question **1**.

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

Exercice 5

La suite (u_n) est définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par : $u_0 = -5$ et $u_{n+1} = u_n^2 + 3u_n$.

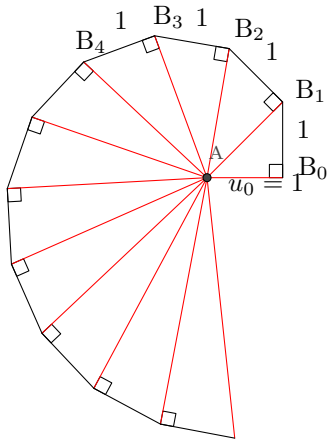
1. Démontrer par récurrence que $u_n \geqslant 0$ pour tout entier $n \geqslant 1$.

2. En déduire les variations de la suite (u_n).

On considère la suite des triangles $\mathrm{AB}_n\mathrm{B}_{n+1}$ rectangles en B_n construits à partir d'un premier triangle $\mathrm{AB}_0\mathrm{B}_1$ rectangle isocèle en A tels que $\mathrm{AB}_0 = \mathrm{B}_0\mathrm{B}_1 = 1$.

Chaque triangle $\mathrm{AB}_n\mathrm{B}_{n+1}$ est construit de sorte que $(\mathrm{AB}_n) \perp (\mathrm{B}_n\mathrm{B}_{n+1})$ et $\mathrm{B}_n\mathrm{B}_{n+1} = 1$.

On note, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \mathrm{AB}_n$.



1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sqrt{u_n^2 + 1}$.

2. Démontrer, par récurrence, que la suite (u_n) est strictement croissante.

3. **a.** Calculer u_1, u_2 et u_3 puis conjecturer une expression de u_n en fonction de n.

b. Démontrer cette conjecture par récurrence puis expliquer pourquoi cette spirale permet de construire algébriquement la racine carrée de n'importe quel entier naturel.

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....