MATHEMATIQUES
Raisonnement par récurrence : entraînement (corrigé)

Exercice 1

1. La fonction f est une fonction polynôme du second degré. Elle est donc dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout x de $\mathbb{R}$:

$$f'(x) = \frac{1}{4} \times 2x - \frac{1}{4} = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}$$

L'équation $\frac{1}{2}x - \frac{1}{4} = 0$ a pour solution $x = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{4} \times 2 = \frac{1}{2}$.

Or, $\frac{1}{2} < 1$, donc le tableau de variations de la fonction f est le suivant :

x	1	3
$f'(x)$	$+$	
$f(x)$	1 $\nearrow$	$\frac{5}{2}$

Autrement

Il s'agit d'un polynôme du second degré avec $a > 0$. f est donc strictement décroissante puis croissante sur $\mathbb{R}$. Le changement de variation s'effectue en $\alpha = -\frac{b}{2a} = -\frac{-\frac{1}{4}}{2 \times \frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$. Ainsi, f est strictement croissante sur $[1\ ;\ 3]$.

2. • Initialisation : $u_0 = 3$ et on a bien $1 \leqslant 3 \leqslant 3$.
La propriété est donc vraie au rang 0.

• Hérédité :
Supposons que pour **un** entier naturel n, on ait :

$$1 \leqslant u_n \leqslant 3 \qquad \text{Hypothèse de récurrence.}$$

Montrons qu'alors on a : $1 \leqslant u_{n+1} \leqslant 3$.

L'idée

Pour cette démonstration, on va utiliser le sens de variation de la fonction f étudiée dans la question précédente. C'est cette fonction qui permet de passer de u_n à u_{n+1} car on a $u_{n+1} = f(u_n)$. Et comme elle est croissante, les nombres et les images sont rangées dans le même ordre.

On a :

$$\begin{array}{rcll} 1 \leqslant & u_n & \leqslant 3 & \text{Hypothèse de récurrence.} \\ \underbrace{f(1)}_{=1} \leqslant & \underbrace{f(u_n)}_{u_{n+1}} & \leqslant \underbrace{f(3)}_{=2{,}5} & \text{On ne change pas l'ordre car } f \text{ est croissante sur } [1\ ;\ 3] \\ 1 \leqslant & u_{n+1} & \leqslant 2{,}5 & \end{array}$$

Or, $2,5 < 3$, donc on obtient $1 \leqslant u_{n+1} \leqslant 3$ ce qui est la propriété au rang $n+1$.

Donc la propriété est vraie au rang $n+1$ (la propriété est donc héréditaire).

• Conclusion : Pour tout entier naturel $n \geqslant 0$, la propriété est vraie, ce qui équivaut à dire que :

Pour tout entier $n \geqslant 0$, on a $1 \leqslant u_n \leqslant 3$

3. La propriété à démontrer est la suivante :
Pour tout entier naturel n, $u_n \geqslant u_{n+1}$.

Rappel

Ici, la propriété à démontrer n'est pas explicitement écrite. Il s'agit donc d'utiliser la définition de "la suite (u_n) est décroissante" : une suite u est décroissante si et seulement si pour tout entier naturel n, $u_n \geqslant u_{n+1}$.

- Initialisation :
$u_0 = 3$ et $u_1 = f(u_0) = f(3) = \frac{1}{4} \times 3^2 - \frac{1}{4} \times 3 + 1 = 2,5$.
On a $u_0 \geqslant u_1$, la propriété est donc vraie au rang 0.

- Hérédité :
Supposons que pour **un** entier naturel n, on ait :

$$u_n \geqslant u_{n+1} \qquad \text{Hypothèse de récurrence.}$$

Montrons qu'alors on a : $u_{n+1} \geqslant u_{n+2}$.

On a :

$$\begin{aligned} u_n &\geqslant u_{n+1} && \text{Par hypothèse de récurrence.} \\ f(u_n) &\geqslant f(u_{n+1}) && f \text{ est croissante sur } [1\,;\,3]. \\ u_{n+1} &\geqslant u_{n+2} && \text{Propriété au rang } n+1. \end{aligned}$$

Donc la propriété est vraie au rang $n+1$ (la propriété est donc héréditaire).

Comment faire ?

On va encore utiliser le sens de variation de la fonction f. En partant de l'hypothèse de récurrence et en "appliquant f", on doit obtenir l'inégalité au rang $n+1$.

Attention

Cette méthode ne marche que lorsque la fonction associée à la suite est croissante.
N'oubliez pas que $f(u_n) = u_{n+1}$
et $f(u_{n+1}) = u_{n+2}$.

- Conclusion : Pour tout entier naturel $n \geqslant 0$, la propriété est vraie, ce qui équivaut à dire que :

$$(u_n) \text{ est une suite décroissante.}$$

Exercice 2

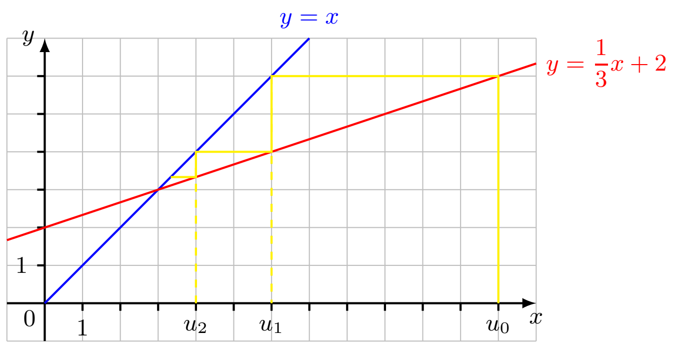
Attention

Dans le cas d'une suite définie par récurrence par $u_{n+1} = f(u_n)$, une représentation graphique de la suite s'obtient en procédant de la façon suivante :

1. On trace la représentation graphique $\mathcal{C}$ de f et la droite d'équation $y = x$.
2. On place le premier terme u_0 sur l'axe des abscisses.
3. On utilise $\mathcal{C}$ pour construire $u_1 = f(u_0)$ sur l'axe des ordonnées.
4. On reporte u_1 sur l'axe des abscisses à l'aide de la droite d'équation $y = x$.
5. On utilise $\mathcal{C}$ pour construire $u_2 = f(u_1)$ sur l'axe des ordonnées.
6. etc.

On obtient alors la *répresentation en chemin* de la suite.

1. Conjecture.



Graphiquement, $u_0 \geqslant u_1 \geqslant u_2$. On conjecture que (u_n) est décroissante.

2. La propriété à démontrer est la suivante :
Pour tout entier naturel n, $u_n \geqslant u_{n+1}$.

- Initialisation :
$u_0 = 12$ et $u_1 = f(u_0) = f(12) = \frac{1}{3} \times 12 + 2 = 6$.
On a $u_0 \geqslant u_1$, la propriété est donc vraie au rang 0.

- Hérédité :
Supposons que pour **un** entier naturel n, on ait :

$$u_n \geqslant u_{n+1} \qquad \text{Hypothèse de récurrence.}$$

Montrons qu'alors on a : $u_{n+1} \geqslant u_{n+2}$.

La fonction f associée à la suite est définie par $f(x) = \frac{1}{3}x + 2$.

C'est une fonction affine avec $m = \frac{1}{3} > 0$.
Elle est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

On va en avoir besoin
Vous devez identifier la fonction f associée à la suite et justifier que celle-ci est croissante pour pouvoir l'utiliser ensuite dans la démonstration.

On a :

$$\begin{aligned} u_n &\geqslant u_{n+1} && \text{Par hypothèse de récurrence.} \\ f(u_n) &\geqslant f(u_{n+1}) && f \text{ est croissante sur } \mathbb{R}. \\ u_{n+1} &\geqslant u_{n+2} && \text{Propriété au rang } n+1. \end{aligned}$$

Donc la propriété est vraie au rang $n+1$ (la propriété est donc héréditaire).

- Conclusion : Pour tout entier naturel $n \geqslant 0$, la propriété est vraie, ce qui équivaut à dire que :

(u_n) est une suite décroissante.

Exercice 3

1. Avec la calculatrice, on obtient :

n	0	1	2	3	4	5
u_n	1	3	6	11	20	37
$u_n - n$	1	2	4	8	16	32

2. On remarque que $1 = 2^0$, $2 = 2^2$, $4 = 2^2$, $8 = 2^3$, $16 = 2^4$, $32 = 2^5$.

On conjecture que $u_n - n = 2^n$.

3. La propriété à démontrer est la suivante :
Pour tout entier naturel n, $u_n = 2^n + n$.

Remarque
C'est exactement la conjecture émise.
En effet, on a conjecturé : $u_n - n = 2^n$ ce qui est $u_n = 2^n + n$.

- Initialisation :
$u_0 = 1$ et $2^0 + 0 = 1$.
La propriété est donc vraie au rang 0.

- Hérédité :
Supposons que pour **un** entier naturel n, on ait :

$$u_n = 2^n + n \qquad \text{Hypothèse de récurrence.}$$

Montrons qu'alors on a : $u_{n+1} = 2^{n+1} + (n+1)$.

On a :

$$\begin{aligned}
u_{n+1} &= 2\underbrace{u_n}_{=2^n+n} + 1 - n && \text{D'après l'énoncé.}\\
u_{n+1} &= 2(2^n + n) + 1 - n\\
u_{n+1} &= \underbrace{2 \times 2^n}_{=2^{n+1}} + 2n + 1 - n && \text{D'après l'hypothèse de récurrence.}\\
u_{n+1} &= 2^{n+1} + n + 1\\
u_{n+1} &= 2^{n+1} + n + 1 && \text{Propriété au rang } n+1.
\end{aligned}$$

Donc la propriété est vraie au rang $n+1$ (la propriété est donc héréditaire).

- Conclusion : Pour tout entier naturel $n \geqslant 0$, la propriété est vraie, ce qui équivaut à dire que :

$$(u_n) = 2^n + n$$

Exercice 4

1. • Initialisation :

$S_1 = \sum_{k=1}^{1} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{1 \times (1+1)} = \frac{1}{2}$ et $\frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$.

La propriété est donc vraie au rang 1.

• Hérédité :

Supposons que pour **un** entier naturel n non nul, on ait :

$$S_n = \frac{n}{n+1} \qquad \text{Hypothèse de récurrence.}$$

Montrons qu'alors on a : $S_{n+1} = \frac{n+1}{n+2}$.

On a :

$$\begin{aligned}
S_{n+1} &= \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k(k+1)}\\
&= \underbrace{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}}_{=\frac{n}{n+1}} + \frac{1}{(n+1)(n+2)}\\
&= \frac{n}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} && \text{D'après l'hypothèse de récurrence.}\\
&= \frac{n(n+2)}{(n+1)(n+2)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} && \text{Mise au même dénominateur.}\\
&= \frac{n^2 + 2n + 1}{(n+1)(n+2)}\\
&= \frac{(n+1)^2}{(n+1)(n+2)} && \text{Car } n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2.\\
&= \frac{n+1}{n+2} && \text{En simplifiant par } n+1. \text{ On obtient la propriété au rang } n+1.
\end{aligned}$$

Donc la propriété est vraie au rang $n+1$ (la propriété est donc héréditaire).

- Conclusion : Pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, la propriété est vraie, ce qui équivaut à dire que :

$$S_n = \frac{n}{n+1}$$

2. a. Pour tout entier $k \geqslant 1$:

$$\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\frac{k+1}{k(k+1)} - \frac{k}{k(k+1)} = \frac{k+1-k}{k(k+1)} = \frac{1}{k(k+1)}.$$

b. On écrit les égalités pour $k = 1$, $k = 2$, ... , jusqu'à $k = n$ et c'est la cascade !

Pour $k = 1$, $\quad \dfrac{1}{1(1+1)} = \dfrac{1}{1} - \dfrac{1}{2}.$

Pour $k = 2$, $\quad \dfrac{1}{2(2+1)} = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{3}.$

Pour $k = 3$, $\quad \dfrac{1}{3(3+1)} = \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{4}.$

....

Pour $k = n$, $\quad \dfrac{1}{n(n+1)} = \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1}.$

Classique

Assez classique comme raisonnement avec les sommes (ou avec des produits aussi). Il faut y penser.

En faisant la somme membre à membre, il vient :

$$\frac{1}{1(1+1)} + \frac{1}{2(2+1)} + \frac{1}{3(3+1)} + \dots\dots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots\dots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

Soit :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} &= \frac{1}{1} - \cancel{\frac{1}{2}} + \cancel{\frac{1}{2}} - \cancel{\frac{1}{3}} + \cancel{\frac{1}{3}} - \cancel{\frac{1}{4}} + \cancel{\dots\dots\dots} + \cancel{\frac{1}{n}} - \frac{1}{n+1} \\
&= \frac{1}{1} - \frac{1}{n+1} \\
&= \frac{n+1}{n+1} - \frac{1}{n+1} \\
&= \frac{n+1-1}{n+1} \\
&= \frac{n}{n+1}
\end{aligned}$$

Exercice 5

1. Soit n un entier naturel.

Le triangle $\mathrm{AB}_n\mathrm{B}_{n+1}$ est rectangle en B_n donc, d'après le théorème de Pythagore :

$$\mathrm{AB}_{n+1}^2 = \mathrm{AB}_n^2 + \mathrm{B}_n\mathrm{B}_{n+1}^2$$

On obtient alors $u_{n+1}^2 = u_n^2 + 1^2$ et par conséquent, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sqrt{u_n^2+1}$.

2. Récurrence.

- **Initialisation :** $u_0 = 1$ et $u_1 = \sqrt{u_0^2+1} = \sqrt{1^2+1} = \sqrt{2} > u_0$ donc la propriété est donc vraie au rang 0 ;
- **Hérédité :** Soit n un entier naturel fixé quelconque.
  On suppose vraie la propriété au rang n, c'est à dire $u_{n+1} > u_n$.
  $$\begin{aligned} u_{n+1} > u_n &\iff u_{n+1}^2 > u_n^2 \quad \text{car la fonction carré est strictement croissante sur } [0\,;\,\infty[\\ &\iff u_{n+1}^2 + 1 > u_n^2 + 1 \\ &\iff \underbrace{\sqrt{u_{n+1}^2+1}}_{u_{n+2}} > \underbrace{\sqrt{u_n^2+1}}_{u_{n+1}} \quad \text{car la fonction racine est strictement croissante sur } [0\,;\,\infty[\end{aligned}$$

Conclusion : La propriété est vraie au rang 0 et est héréditaire donc, pour pout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} > u_n$ et donc la suite (u_n) est strictement croissante.

3. Récurrence.

a. $u_1 = \sqrt{2}$, $u_2 = \sqrt{\sqrt{2}^2+1} = \sqrt{3}$ et $u_3 = \sqrt{\sqrt{3}^2+1} = \sqrt{4} = 2$, etc.
On peut conjecturer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \sqrt{n+1}$.

b.

- **Initialisation :** $u_0 = 1$ or $\sqrt{0+1} = \sqrt{1} = 1$ donc la propriété est donc vraie au rang 0 ;
- **Hérédité :** Soit n un entier naturel fixé quelconque.
  On suppose vraie la propriété au rang n, c'est à dire $u_n = \sqrt{n+1}$.
  $$\begin{aligned} u_{n+1} &= \sqrt{u_n^2+1} \\ &= \sqrt{\sqrt{n+1}^2+1} \quad \text{par hypothèse de récurrence} \\ &= \sqrt{n+1+1} \\ &= \sqrt{n+2} \end{aligned}$$

Conclusion : La propriété est vraie au rang 0 et est héréditaire donc, pour pout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \sqrt{n+1}$.
Les hypoténuses des triangles $\mathrm{AB}_n\mathrm{B}_{n+1}$ rectangles en B_n sont donc de longueur respective 1, $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{4} = 2$, $\sqrt{5}$.