MATHEMATIQUES
Raisonnement par récurrence : entraînement savoir-faire (corrigé)

Exercice 1

- Initialisation :

$$2^0 - 1 = 1 - 1 = 0 = u_0$$

La propriété est donc vraie au rang 0.

- Hérédité :

Supposons que pour **un** entier naturel n, on ait :

$$u_n = 2^n - 1 \qquad \text{Hypothèse de récurrence.}$$

Montrons qu'alors on a : $u_{n+1} = 2^{n+1} - 1$.

Or on a :

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= 2\underbrace{u_n}_{=2^n-1} + 1 && \text{par définition.} \\ &= 2(2^n - 1) + 1 && \text{par hypothèse de récurrence.} \\ &= 2^{n+1} - 2 + 1 \\ &= 2^{n+1} - 1 \end{aligned}$$

Attention

L'énoncé n'indique pas qu'il faut utiliser un raisonnement par récurrence. Et pourtant, c'est bien une récurrence qui va nous permettre de répondre. Cela ne signifie pas qu'à chaque question vous devez faire une récurrence. Soyez prudent et ne faites pas de récurrence à tout-va....

Conseil

Ecrivez clairement ce que vous voulez démontrer. C'est important de ne pas oublier ce que l'on veut démontrer.

Conseils

Pour prouver que la propriété est vraie au rang $(n+1)$ (en ayant supposé qu'elle est vraie au rang n), partez de ce que vous avez dans l'énoncé. Ici, on part de l'égalité $u_{n+1} = 2u_n + 1$, qui est l'expression de récurrence de la suite u. De plus, dans votre raisonnement vous devez absolument vous servir à un moment donné de votre hypothèse de récurrence.... sinon, ça sent pas bon...

Donc la propriété est vraie au rang $n+1$ (la propriété est donc héréditaire).

- Conclusion : Pour tout entier naturel $n \geqslant 0$, la propriété est vraie, ce qui équivaut à dire que :

$$\textbf{Pour tout} \text{ entier } n \geqslant 0, \text{ on a } u_n = 2^n - 1.$$

Exercice 2

- Initialisation : $5^2 = 25$ et $4^2 + 3^2 = 25$. On a donc bien $5^2 \geqslant 4^2 + 3^2$. La propriété est donc vraie au rang 2.

- Hérédité :

Supposons que pour **un** entier naturel n, on ait :

$$5^n \geqslant 4^n + 3^n \qquad \text{Hypothèse de récurrence.}$$

Montrons qu'alors on a : $5^{n+1} \geqslant 4^{n+1} + 3^{n+1}$.

On a :

$$\begin{aligned} 5^n &\geqslant 4^n + 3^n && \text{par hypothèse de récurrence.} \\ 5 \times 5^n &\geqslant 5 \times 4^n + 5 \times 3^n && \text{en multipliant par 5.} \\ 5^{n+1} &\geqslant \underbrace{5 \times 4^n + 5 \times 3^n}_{\text{Il faut montrer que cette expression est plus grande que } 4^{n+1}+3^{n+1}} \end{aligned}$$

Rédaction

La rédaction est très importante dans ce genre de démonstration. Pour l'hérédité on suppose que la propriété est vraie pour **un certain** entier naturel n. PAS POUR TOUS !!!!

Explication

Ici, on part de l'hypothèse de récurrence. On a le droit puisqu'on l'a supposée. C'est très important de savoir d'où l'on part (pour arriver au but). C'est à force d'en faire que des automatismes s'installent. Donc, entraînez-vous.

Or, $5 \times 4^n \geqslant 4 \times 4^n$ et $4 \times 4^n = 4^{n+1}$.
On a donc $5 \times 4^n \geqslant 4^{n+1}$ (**Inégalité (1)**).

De même,

$5 \times 3^n \geqslant 3 \times 3^n$ et $3 \times 3^n = 3^{n+1}$.
On a donc $5 \times 3^n \geqslant 3^{n+1}$ (**Inégalité (2)**).

L'idée

L'idée ici est de prouver que $5 \times 4^n + 5 \times 3^n$ est plus grand que $4^{n+1} + 3^{n+1}$. N'oubliez pas que $4^{n+1} = 4 \times 4^n$ et que $5 > 4$ (c'est à savoir !)

Ainsi, en "additionnant" les inégalités (1) et (2), on obtient : $5 \times 4^n + 5 \times 3^n \geqslant 4^{n+1} + 3^{n+1}$.

Par conséquent, on a bien $5^{n+1} \geqslant 4^{n+1} + 3^{n+1}$ ce qui est la propriété au rang $n+1$.

Donc la propriété est vraie au rang $n+1$ (la propriété est donc héréditaire).

- Conclusion : Pour tout entier naturel $n \geqslant 0$, la propriété est vraie, ce qui équivaut à dire que :

Pour tout entier $n \geqslant 2$, on a $5^n \geqslant 4^n + 3^n$.

Exercice 3

- Initialisation :

$u_0 = 3$ et on a bien $2 \leqslant 3 \leqslant 3$.
La propriété est donc vraie au rang 0.

- Hérédité :

Supposons que pour **un** entier naturel n, on ait :

$2 \leqslant u_n \leqslant 3$ Hypothèse de récurrence.

Montrons qu'alors on a : $2 \leqslant u_{n+1} \leqslant 3$.

Comment faire ?

En partant de l'encadrement $2 \leqslant u_n \leqslant 3$, on va par inégalités successives former u_{n+1}. On va donc d'abord "passer à l'inverse", puis en ajoutant 2 on devrait obtenir quelque chose de pas mal .... N'oubliez pas de justifier le passage à l'inverse.

On a :

$$\begin{aligned}
2 \leqslant & u_n \leqslant 3 && \text{Par hypothèse de récurrence.}\\
\frac{1}{2} \geqslant & \frac{1}{u_n} \geqslant \frac{1}{3} && \text{La fonction inverse est strictement décroissante sur }]0\ ;\ +\infty[\\
\frac{1}{2} + 2 \geqslant & 2 + \frac{1}{u_n} \geqslant \frac{1}{3} + 2 && \text{On ajoute 2.}\\
\frac{5}{2} \geqslant & \underbrace{2 + \frac{1}{u_n}}_{u_{n+1}} \geqslant \frac{7}{3} &&\\
\frac{7}{3} \leqslant & u_{n+1} \leqslant \frac{5}{2} &&
\end{aligned}$$

On n'obtient pas exactement le résultat souhaité : $2 \leqslant u_{n+1} \leqslant 3$.
Mais : $\frac{5}{2} < 3$ et $\frac{7}{3} > 2$, on a donc :

$$2 < \frac{7}{3} \leqslant u_{n+1} \leqslant \frac{5}{2} < 3$$

Donc la propriété est vraie au rang $n+1$ (la propriété est donc héréditaire).

- Conclusion : Pour tout entier naturel $n \geqslant 0$, la propriété est vraie, ce qui équivaut à dire que :

Pour tout entier $n \geqslant 0$, on a $2 \leqslant u_n \leqslant 3$

Exercice 4

La propriété à démontrer est la suivante :
Pour tout entier naturel n, $u_{n+1} \leqslant u_n$.

Rappel

Ici, la propriété à démontrer n'est pas explicitement écrite. Il s'agit donc d'utiliser la définition de "la suite (u_n) est décroissante" : une suite u est décroissante si et seulement si pour tout entier naturel n, $u_{n+1} \leqslant u_n$.

- Initialisation :

$u_0 = 5$ et $u_1 = \sqrt{3 \times 5 - 2} = \sqrt{13}$ et $5 \geqslant \sqrt{13}$ soit $u_0 \geqslant u_1$.
La propriété est donc vraie au rang 0.

- Hérédité :

Supposons que pour **un** entier naturel n, on ait :

$u_n \geqslant u_{n+1}$ Hypothèse de récurrence.

Comment faire ?

On part de l'hypothèse de récurrence et par inégalités successives on essaie d'obtenir l'inégalité souhaitée : $u_{n+1} \geqslant u_{n+2}$. N'oubliez pas que $u_{n+1} = \sqrt{3u_n - 2}$ et $u_{n+2} = \sqrt{3u_{n+1} - 2}$.

Montrons qu'alors on a : $u_{n+1} \geqslant u_{n+2}$.

On a :

$$\begin{aligned}
u_n &\geqslant u_{n+1} && \text{Par hypothèse de récurrence.}\\
3u_n &\geqslant 3u_{n+1} && \text{On multiplie par 3}\\
3u_n - 2 &\geqslant 3u_{n+1} - 2 && \text{On retranche 2.}\\
\sqrt{3u_n - 2} &\geqslant \sqrt{3u_{n+1} - 2} && \text{La fonction racine carrée est strictement croissante sur } [0\ ;\ +\infty[.\\
u_{n+1} &\geqslant u_{n+2} && \text{Ce qu'on voulait démontrer.}
\end{aligned}$$

Donc la propriété est vraie au rang $n + 1$ (la propriété est donc héréditaire).

- Conclusion : Pour tout entier naturel $n \geqslant 0$, la propriété est vraie, ce qui équivaut à dire que :

(u_n) est une suite décroissante.