

# Les fcts polynômes de degré 3

## Les savoir-faire du chapitre

- ▶ **1STMG.150** Reconnaître une fonction polynôme du troisième degré.
- ▶ **1STMG.151** Vérifier qu'une valeur est la racine d'un polynôme du troisième degré.
- ▶ **1STMG.152** Associer une fonction à une courbe d'équation  $y = ax^3 + b$  ou  $y = a(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$ .
- ▶ **1STMG.153** Résoudre une équation de la forme  $x^3 = c$ .
- ▶ **1STMG.154** Déterminer le signe d'une fonction de la forme  $x \mapsto a(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$ .



## Activité d'introduction

Une usine agricole produit chaque mois entre 0 et 50 machines agricoles. On a modélisé le bénéfice de cette entreprise, exprimé en milliers d'euros, par la fonction  $f$  définie pour tout  $x \in [0; 50]$  par :

$$f(x) = x^3 - 95x^2 + 2\,450x - 10\,000$$

- 1) Montrer que, pour tout  $x \in [0; 50]$ ,  $f(x) = (x - 5)(x - 40)(x - 50)$ .
- 2) Étudier le signe de  $f(x)$ .
- 3) En déduire le nombre de machines agricoles que l'entreprise doit produire pour réaliser des profits.





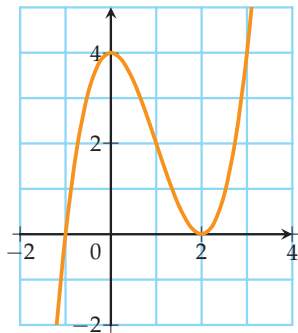
## Généralités sur les fonctions

1 Justifier que les fonctions suivantes sont des fonctions polynômes du troisième degré.

- 1)  $f(x) = 4x^3 - 2x + 3$
- 2)  $g(x) = -3(x+7)(x-2)(x-1)$
- 3)  $h(x) = 2(x-1)(x-1)^2$

2 On considère la fonction polynôme de degré 3 définie pour tout  $x \in \mathbb{R}$  par :  $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4$ .

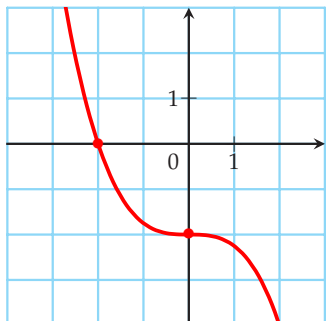
- 1) a) Montrer que 2 et  $(-1)$  sont deux racines de  $f$ .  
b) Que peut-on en déduire graphiquement?
- 2) On a tracé ci-dessous la courbe représentant  $f$ .



- a) Résoudre graphiquement l'équation  $f(x) = 4$ .
- b) Résoudre graphiquement l'inéquation  $f(x) < 0$ .

$$x \longmapsto ax^3 + b$$

3 On a représenté ci-dessous une fonction polynôme de degré 3 dont l'expression est :  $f(x) = ax^3 + b$



- 1) Déterminer graphiquement la valeur de  $b$
- 2) Déterminer, par lecture graphique, le réel  $f(-2)$ .
- 3) En déduire l'expression de la fonction  $f$ .

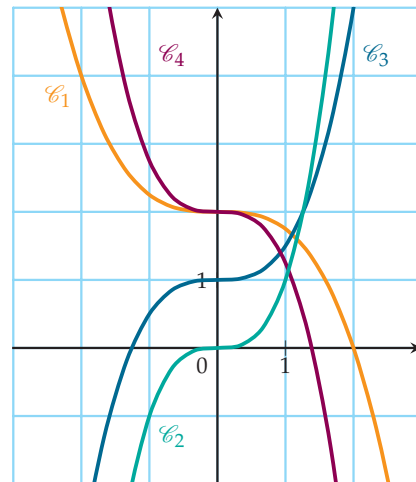
4 Dresser le tableau de variation des fonctions suivantes :

- 1)  $f(x) = -2x^3 + 1$
- 2)  $g(x) = 5x^3 - 4$

5 Les fonctions ci-dessous sont définies sur  $\mathbb{R}$  :

- 1)  $f(x) = 0,5x^3 + 1$
- 2)  $g(x) = -0,75x^3 + 2$
- 3)  $h(x) = x^3$
- 4)  $k(x) = -0,25x^3 + 2$

Associer chacune des courbes ci-dessous aux fonctions données.



## Résolution d'équations

Pour les exercices suivants, résoudre dans  $\mathbb{R}$  les équations suivantes. On donnera la valeur exacte puis une valeur approchée à 0,01 près des solutions.

- 6
- 1)  $x^3 = 1\,000$
  - 2)  $x^3 = 64$
  - 3)  $2x^3 + 11 = 5$

- 7
- 1)  $x^3 - 4 = 0$
  - 2)  $2x^3 = x^3 + 1$
  - 3)  $x^3 - 4x^2 = 0$

- 8
- 1)  $x^3 + 3x^2 = 3x^2 - 1$
  - 2)  $3x^3 + 3 = 2x^3 + 4$

- 9
- 1)  $(x^2 - 4)(4 - 3x) = 0$
  - 2)  $(2x + 1)(4x^2 - 4) = 0$

$$x \mapsto a(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$$

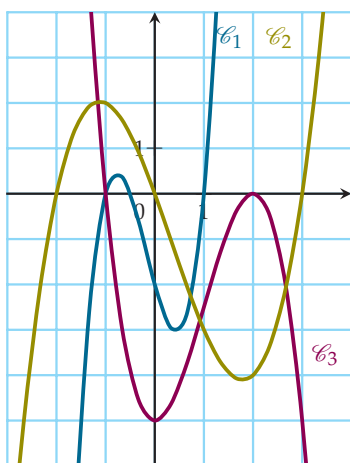
**10** Les fonctions ci-dessous sont définies sur  $\mathbb{R}$  :

1)  $f(x) = -\frac{5}{4}(x+1)(x-2)^2$ ;

2)  $g(x) = 4(x+1)(x-1)(x+0,5)$ ;

3)  $h(x) = \frac{1}{2}x(x-3)(x+2)$ .

Associer chacune des courbes ci-dessous aux fonctions données.



**11** Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par :

$$f(x) = -3(x-8)(x+5)(x-3)$$

- 1) Dresser le tableau de signes de  $f$  sur  $\mathbb{R}$ .
- 2) En déduire les solutions de l'inéquation  $f(x) < 0$ .

**12** Résoudre dans  $\mathbb{R}$  les inéquations suivantes :

1)  $2(x-1)(x+4)(x-3) \geq 0$

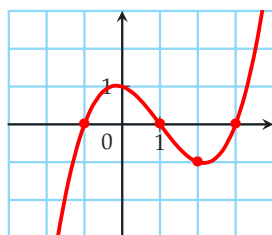
2)  $-(x+1)^2(x+2) \leq 0$

**13** Résoudre dans  $\mathbb{R}$  les inéquations suivantes :

1)  $-2x(x+5)(x-2) > 0$     2)  $(x-1)^3 \leq 0$

**14** On a représenté ci-dessous une fonction polynôme du second degré dont l'expression est :

$$f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$$



- 1) Quelles sont les valeurs de  $x_1$ ,  $x_2$  et  $x_3$  ?
- 2) Déterminer la valeur de  $a$  sachant que  $f(2) = -3$

## E3C

**15**

L'objectif de l'exercice est de trouver le maximum de la fonction  $f$  définie sur l'intervalle  $[200; 400]$  par

$$f(x) = -0,01x^3 + 4x^2$$

- 1) On admet que la fonction  $f$  est dérivable sur  $[200; 400]$  et on note  $f'$  sa dérivée. Calculer  $f'(x)$  et montrer que  $f'(x) = x(-0,03x + 8)$ .
- 2) Donner le tableau de signe de la fonction dérivée  $f'$  sur l'intervalle  $[200; 400]$ .
- 3) En déduire le tableau de variation de la fonction  $f$  sur l'intervalle  $[200; 400]$ .
- 4) Quel est le maximum de cette fonction sur l'intervalle  $[200; 400]$ ? En quelle valeur est-il atteint?
- 5) Pour vérifier la solution de l'équation  $f'(x) = 0$  sur l'intervalle  $[200; 400]$ , on utilise l'algorithme de balayage ci-dessous, écrit en langage Python :

```
def balayage(pas):
    x=200
    while x*(-0.03*x+8)>0:
        x=x+pas
    return (x-pas, x)
```

Que renvoie l'instruction balayage(1)?

**16** Soit  $f$  la fonction définie sur l'intervalle  $[-5; 5]$  par :

$$f(x) = x^3 - 3x^2 - 24x + 8$$

- 1) a) Calculer  $f'(x)$ , où  $f'$  désigne la fonction dérivée de  $f$  sur l'intervalle  $[-5; 5]$ .  
b) Vérifier que pour tout  $x \in [-5; 5]$ ,  $f'(x) = 3(x-4)(x+2)$ .
- 2) a) Étudier le signe de  $f'(x)$  sur l'intervalle  $[-5; 5]$ .  
b) En déduire les variations de  $f$  sur l'intervalle  $[-5; 5]$ .
- 3) Déterminer la valeur de  $x$  pour laquelle la fonction  $f$  admet un maximum sur l'intervalle  $[-5; 5]$  et en préciser la valeur.