Cours & méthodes

Produit scalaire

7

GÉOMÉTRIE

1 Produit scalaire dans le plan

1.1 Définition avec normes et angle

Définition : Produit scalaire

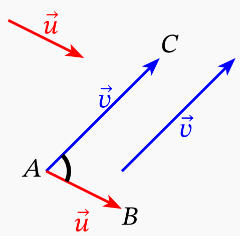
Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls du plan. Il existe trois points A, B et C tels que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$.
On appelle **produit scalaire** des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ le nombre réel noté $\vec{u} \cdot \vec{v}$ défini par : $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\widehat{BAC})$.
Autrement dit, $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos(\widehat{BAC})$.

Remarque

Si $\vec{u} = \vec{0}$ ou $\vec{v} = \vec{0}$ alors $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.

On appelle **carré scalaire** du vecteur $\overrightarrow{AB}$ la quantité $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB}$ et on la note $\overrightarrow{AB}^2$.

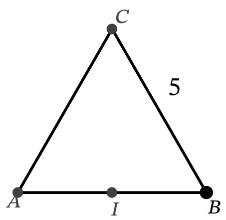
Ainsi : $\overrightarrow{AB}^2 = \|\overrightarrow{AB}\|^2 = AB^2$.



Méthode : Calculer un produit scalaire avec le cosinus

Soit un triangle équilatéral ABC de côté 5.
I est le milieu de $[AB]$.
Calculer les produits scalaires :

1) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$
2) $\overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{BC}$



1.2 Cas de vecteurs colinéaires

Propriété : Produit scalaire et vecteurs colinéaires

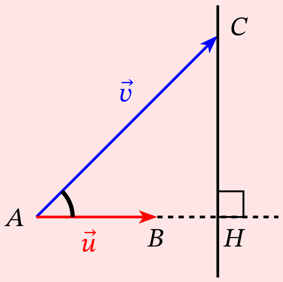
- Si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires et de même sens, alors $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AC$.
- Si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires et de sens contraire, alors $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = -AB \times AC$.

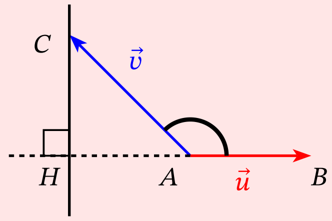
1.3 Définition avec la projection orthogonale

Propriété : Produit scalaire et projection orthogonale

Soit trois points A, B et C avec A et B distincts.
Soit H le projeté orthogonal de C sur la droite (AB). Alors :

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AH}$$





1.4 Symétrie et bilinéarité

Propriété : Symétrie et bilinéarité du produit scalaire

Soit $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs du plan et k un réel.

- `Symétrie` : $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$
- `Bilinéarité` : $(k\vec{u}) \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot (k\vec{v}) = k \times (\vec{u} \cdot \vec{v})$ et $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$

Méthode : Utiliser les formules (symétrie, bilinéarité...)

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de normes respectives 2 et 3 et tels que $\vec{u} \cdot \vec{v} = 1$. Calculer :

1) $(\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v})$
2) $\vec{u} \cdot (\vec{u} + \vec{v})$
3) $-2\vec{v} \cdot (3\vec{u} - \vec{v})$

----

2 Propriété du produit scalaire

2.1 Expression en base orthonormé

Propriété : Expression du produit scalaire dans une base orthonormée

Dans une base orthonormée $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$, on considère $\vec{u}(x \,;\, y)$ et $\vec{v}(x' \,;\, y')$ deux vecteurs.
Alors :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy'$$

Méthode : Calculer un produit scalaire à partir des coordonnées

On donne deux vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}-3\\4\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}-1\\5\end{pmatrix}$.

Calculer $\vec{u}\cdot\vec{v}$.

2.2 Norme d'un vecteur

Propriété : Expression de la norme en base orthonormée

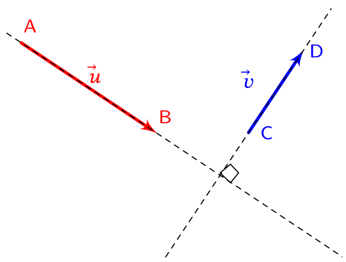
Dans une base orthonormée $(\vec{\imath}\,,\vec{\jmath}\,)$, on considère le vecteur $\vec{u}(x\ ;\ y)$.
Alors la **norme** du vecteur $\vec{u}$, notée $\|\vec{u}\|$, est donnée par :

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2+y^2}$$

2.3 Vecteurs orthogonaux

Définition : Vecteurs orthogonaux

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls du plan et A, B, C et D quatre points tels que $\vec{u}=\overrightarrow{AB}$ et $\vec{v}=\overrightarrow{CD}$. Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont dits orthogonaux lorsque les droites (AB) et (CD) sont perpendiculaires. On note $\vec{u}\perp\vec{v}$.



Le vecteur nul $\vec{0}$ est orthogonal à tout vecteur du plan.

Propriété : Nullité du produit scalaire

Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux si et seulement si :

$$\vec{u}\cdot\vec{v}=0$$

2.4 Critère d'orthogonalité

Propriété : Critère d'orthogonalité

Dans une base orthonormé, on considère deux vecteurs $\vec{u}(x\ ;\ y)$ et $\vec{v}(x'\ ;\ y')$:
Alors, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux si et seulement si :

$$xx'+yy'=0$$

Méthode : Calculer un produit scalaire à partir des coordonnées

On donne les points $A(2\,;\,1)$, $B(5\,;\,3)$, $C(1\,;\,4)$ et $D(5\,;\,-2)$.
Démontrer que (AB) et (CD) sont perpendiculaires.

3 Applications du produit scalaire

3.1 Expression du produit scalaire à l'aide de normes

Propriété : Calcul de $\|\vec{u}+\vec{v}\|^2$

Pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$:

$$\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 + 2\vec{u}\cdot\vec{v}$$

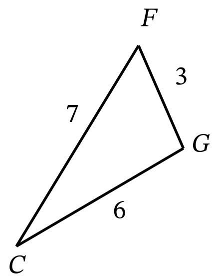
Propriété : Expression du produit scalaire à l'aide de normes

Pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$:

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = \frac{1}{2}\left(\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2\right)$$

Méthode : Calculer un produit scalaire avec les normes

Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{CG}\cdot\overrightarrow{CF}$.

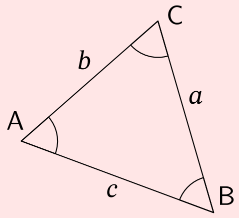


3.2 Formule d'Al-Kashi

Propriété : Formule d'Al-Kashi

Soit ABC un triangle. On note :
$a = BC$, $b = AC$, $c = AB$. Alors :

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\widehat{A}$$

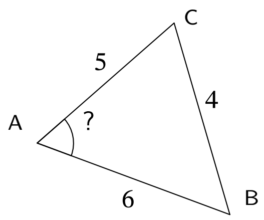


Remarque

- On a de même : $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\widehat{B}$ et $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\widehat{C}$.
- Lorsque $\widehat{A} = 90°$, la relation s'écrit : $a^2 = b^2 + c^2$.

Méthode : Appliquer le théorème d'Al Kashi

Calculer la mesure de l'angle $\widehat{BAC}$.



3.3 Ensemble de points

Propriété : Ensemble de points et produit scalaire

A et B sont deux points distincts donnés.
L'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$ est le cercle de diamètre $[AB]$.