Cours & méthodes

Dérivation (1)

4 ANALYSE

1 Nombre dérivé - Tangente

1.1 Taux de variation

Définition : Taux d'accroissement

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et a un réel appartenant à I. Soit h un réel non nul tel que $a+h \in I$.
Le **taux d'accroissement** (ou taux de variation) de f entre a et $a+h$ est le rapport $t(h)$ défini par :

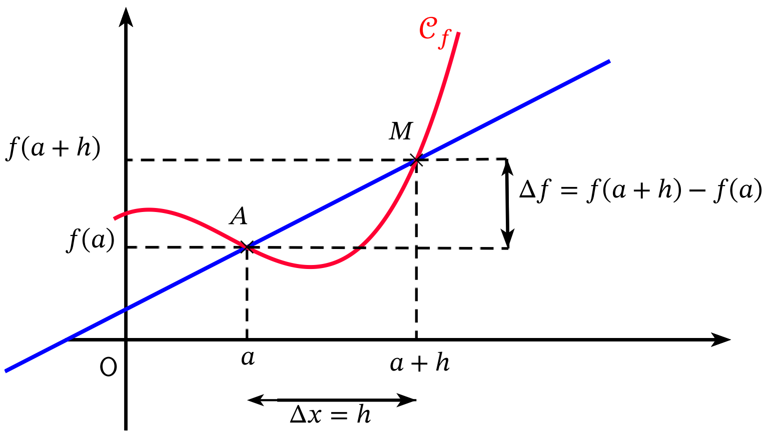
$$t(h) = \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

Remarque

Si a et b sont deux réels distincts de l'intervalle I, le taux d'accroissement de f entre a et b est le nombre $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

Interprétation graphique :
A et M sont des points de $\mathcal{C}_f$ d'abscisses respectives a et $a+h$. Le taux d'accroissement de f entre a et $a+h$ est le coefficient directeur de la droite (AM) :

$$\frac{y_M - y_A}{x_M - x_A} = \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$



1.2 Nombre dérivé

Définition : Nombre dérivé

On dit que f est **dérivable** en a lorsque le taux d'accroissement $t(h)$ admet comme limite un nombre réel quand h tend vers 0. Ce nombre, noté $f'(a)$ est appelé **nombre dérivé de** f en a.
On a ainsi :

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = f'(a)$$

Méthode : Calculer un nombre dérivé (1)

Démontrer que la fonction f définie par $f(x) = x^2 - 3x + 1$ est dérivable en $x = 2$.
Calculer le nombre dérivé en 2.

Méthode : Calculer un nombre dérivé (2)

Soit f la fonction définie sur $]-\infty\ ;\ -2[\cup]-2\ ;\ +\infty[$ par :

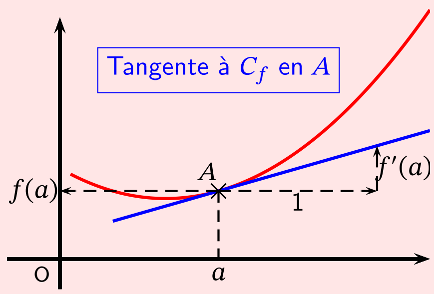
$$f(x) = \frac{1}{x+2}$$

Calculer le nombre dérivé de f en $x = 1$.

1.3 Tangente

Définition : Tangente en un point

Soit f une fonction dérivable en a, $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative et A le point de $\mathcal{C}_f$ d'abscisse a.
La tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point A est la droite passant par le point A dont le coefficient directeur est $f'(a)$.

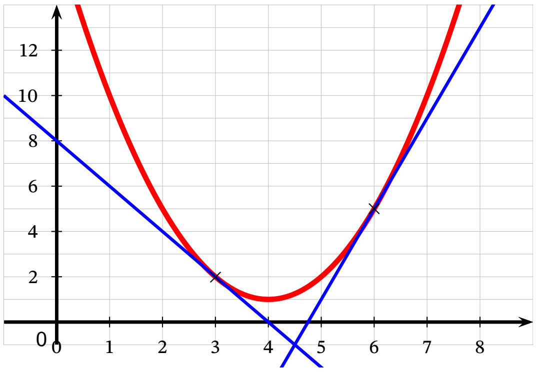


Propriété : Équation d'une tangente

Soit f une fonction définie et dérivable en a et $\mathcal{C}$ sa courbe représentative. Alors $\mathcal{C}$ admet en son point d'abscisse a une tangente T d'équation :$y = f'(a)(x-a) + f(a)$

Méthode : Déterminer graphiquement le nombre dérivé et l'équation de la tangente

Déterminer graphiquement le nombre dérivé et une équation de la tangente en $x = 3$ et $x = 6$.



----

2 Fonctions dérivées

Définition : Fonction dérivable

- On dit que f est dérivable sur un intervalle I lorsqu'elle est dérivable pour tout réel a de I.
- La fonction qui, à tout réel x de I, associe le nombre dérivé $f'(x)$ est appelée **fonction dérivée** de f. On la note f'.

Dérivées de fonctions usuelles :

$f(x) =$	**Dérivable sur** $I =$	$f'(x) =$
k (constante)	$\mathbb{R}$	0
$mx + p$	$\mathbb{R}$	m
x^2	$\mathbb{R}$	$2x$
x^n $(n \in \mathbb{N}^*)$	$\mathbb{R}$	nx^{n-1}
$\frac{1}{x}$	$]-\infty; 0[$ et $]0; +\infty[$	$-\frac{1}{x^2}$
$\sqrt{x}$	$]0; +\infty[$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
$\lvert x \rvert$	$]-\infty; 0[$ et $]0; +\infty[$	-1 si $x \in]-\infty; 0[$ et 1 si $x \in]0; +\infty[$

3 Dérivées et opérations

3.1 Somme et produit

Propriété : Dérivées de la somme et du produit

Soient u et v deux fonctions définies et dérivables sur I et $k \in \mathbb{R}$. Alors :

- La fonction $u + v$ est dérivable sur I et on a : $(u + v)' = u' + v'$.
- La fonction $k \times u$ est dérivable sur I et on a : $(k \times u)' = k \times u'$.
- La fonction $u \times v$ est dérivable sur I et on a : $(u \times v)' = u' \times v + u \times v'$.

Méthode : Dériver une fonction

Déterminer la fonction dérivée de la fonction f définie par : $f(x) = 3x^4 - 2\sqrt{x}$.

Déterminer la fonction dérivée de la fonction f définie par : $f(x) = 3x^3 + 2x^2 - 4x + 7$.

Déterminer la fonction dérivée de la fonction f définie par : $f(x) = (x+1)(3-2x^2)$.

3.2 Inverse et quotient

Propriété : Dérivées de l'inverse et du quotient

Soient u et v deux fonctions définies et dérivables sur I telles que v ne s'annule pas sur I. Alors :

- La fonction $\frac{1}{v}$ est dérivable sur I et on a : $\left(\frac{1}{v}\right)' = -\frac{v'}{v^2}$.
- La fonction $\frac{u}{v}$ est dérivable sur I et on a : $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$.

Méthode : Dériver une fonction

Déterminer la fonction dérivée de la fonction f définie par : $f(x) = \frac{1}{3x^4 + 1}$.

Déterminer la fonction dérivée de la fonction f définie par : $f(x) = \frac{1 - x^2}{3x - 4}$.

3.3 Dérivée d'une fonction composée

Propriété : Dérivée de $x \longmapsto g(mx+p)$

Si g est une fonction dérivable sur un intervalle I et si J est un intervalle tel que pour tout x de J, $mx+p$ appartient à I, alors la fonction f définie par $f(x)=g(mx+p)$ est dérivable sur J et $f'(x)=m\times g'(mx+p)$.

Méthode : Dériver une fonction

Calculer la dérivée de la fonction g définie par : $g(x)=\sqrt{5x-4}$.

4 Les démonstrations

Démonstration : Equation de la tangente à une courbe

Soit une fonction f définie et dérivable sur un intervalle contenant le nombre réel a.
A est un point d'abscisse a appartenant à la courbe représentative de f.
Une équation de la tangente à la courbe de f en A est :

$$y=f'(a)(x-a)+f(a)$$

Démonstration : Dérivée de la fonction carré

Si $f(x)=x^2$, alors $f'(x)=2x$.

Démonstration : Dérivée de la fonction inverse

Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, si $f(x) = \dfrac{1}{x}$, alors $f'(x) = -\dfrac{1}{x^2}$.

Démonstration : La fonction racine carrée n'est pas dérivable en 0

La fonction f définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par $f(x) = \sqrt{x}$ n'est pas dérivable en 0.

Démonstration : $(uv)' = u'v + uv'$

$(uv)' = u'v + uv'$