Cours & méthodes

Dérivation (2)

8

ANALYSE

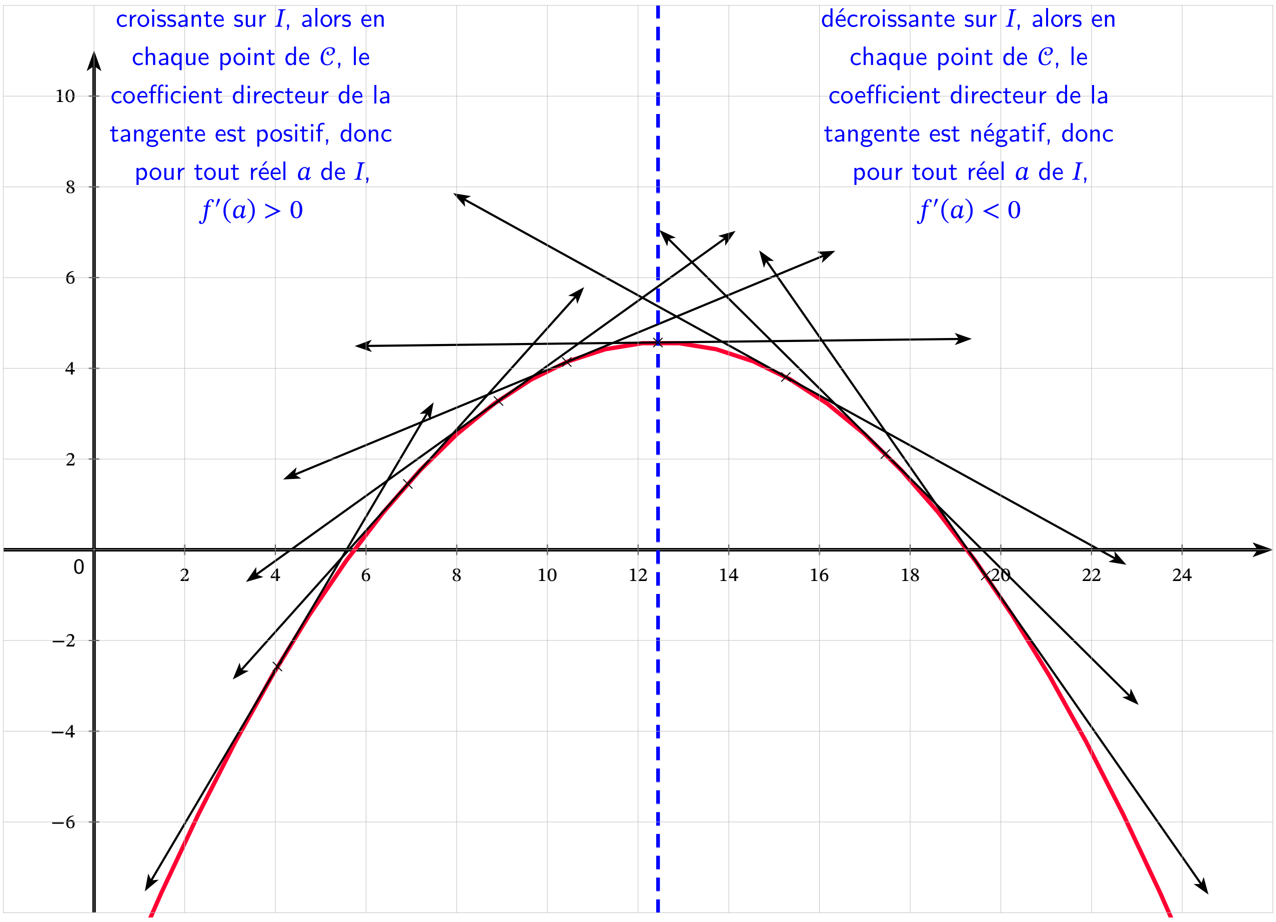
1 Sens de variation et dérivation

Théorème

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I.

- Si f est croissante sur I, alors pour tout réel x de $I, f'(x) \geqslant 0$.
- Si f est décroissante sur I, alors pour tout réel x de I, $f'(x) \leqslant 0$.
- Si f est constante sur I, alors pour tout réel x de I, $f'(x) = 0$.

Interprétation graphique



Théorème

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I.

- Si pour tout réel x de I on a $f'(x) > 0$, alors f est strictement croissante sur I.
- Si pour tout réel x de I on a $f'(x) < 0$, alors f est strictement décroissante sur I.
- Si pour tout réel x de I on a $f'(x) = 0$, alors f est constante sur I.

Remarque

Pour étudier les variations d'une fonction, on étudie le signe de sa dérivée.

Méthode : Comprendre Signe de la dérivée   Variations

1) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$, telle que $f(2) = -1$.
   On donne le signe de la dérivée, compléter le tableau de variations :

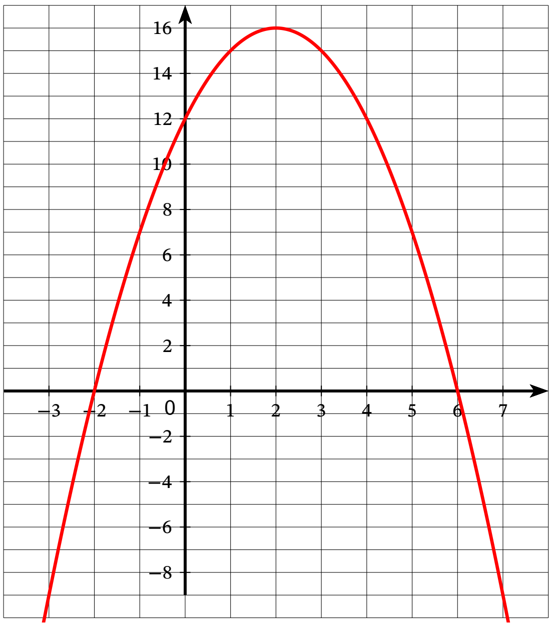
x	$-\infty$		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$					

2) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$, telle que $f(4) = -1$.
   On donne le tableau de variations de la fonction f, compléter le tableau avec le signe de la dérivée.

x	$-\infty$		4		$+\infty$
$f'(x)$			0		
$f(x)$		$\nearrow$		$\searrow$	

3) On donne la représentation graphique de la fonction f, compléter le tableau de variations.

x	$-\infty$				$+\infty$
$f'(x)$			0		
$f(x)$					



Méthode : Étudier les variations d'une fonction

Déterminer les variations de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x^3 + \frac{9}{2}x^2 - 12x + 5$$

2 Extremum d'une fonction

2.1 Maximum, minimum

Définition

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I et a un réel de I.

- On dit que le réel M est **le maximum de f sur I** atteint en a, si $f(a) = M$ et si pour tout réel x de I, on a $f(x) \leqslant M$.

- On dit que le réel m est **le minimum de f sur I** atteint en b, si $f(b) = m$ et si pour tout réel x de I, on a $f(x) \geqslant m$.

- Un **extremum de f sur I** est un maximum ou un minimum.

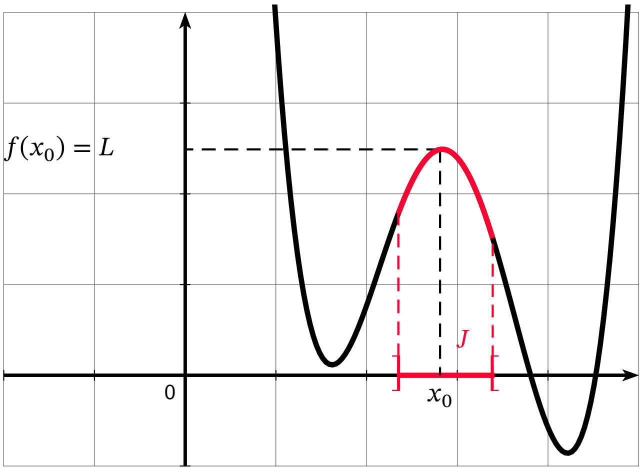
Méthode : Déterminer un extremum

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 5x^2 - 3x + 4$.
Déterminer l'extremum de la fonction f.

2.2 Extremum local

Définition

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I et a un réel de I. Dire que L est un **maximum (respectivement minimum) local** de f sur I s'il existe un intervalle ouvert J contenu dans I, tel que L est le maximum (respectivement minimum) de f sur J.



L est un maximum local de$f$

2.3 Lien dérivée/Extremum local

Théorème

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I.
Si f admet un extremum local en $x_0 \in I$, alors on a $f'(x_0) = 0$.

Remarque

La réciproque de ce théorème est fausse.

Théorème

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I. Soit $x_0 \in I$.
Si $f'(x_0) = 0$ **et si** f' change de signe en x_0, alors f admet un extremum local en x_0.