Cours & méthodes

# Second degré

1

ALGEBRE

## 1 Fonctions polynômes de degré 2

### 1.1 Définition

**Définition** : Fonction polynôme du second degré

On dit qu'une fonction $f$, définie sur $\mathbb{R}$ est une fonction polynôme du second degré s'il existe trois nombres réels $a$ ($a \neq 0$), $b$ et $c$ tels que pour tout nombre réel $x$ :

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

Il s'agit de la **forme développée** de $f(x)$.

**Exemple**

La fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x^2 + 3x – 0,2$ est une fonction polynôme de degré 2.
On a $a = 2$, $b = 3$ et $c = -0,2$.

### 1.2 Forme canonique

**Définition et propriété**

Soit $f$ une fonction polynôme de degré 2 définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2 + bx + c$.
Il existe deux nombres réels $\alpha$ et $\beta$ tels que, pour tout réel $x$,

$$f(x) = a(x – \alpha)^2 + \beta$$

Cette écriture est la **forme canonique** de $f$.
$\alpha = -\dfrac{b}{2a}$ et $\beta = f\left(-\dfrac{b}{2a}\right)$.

**Méthode** : Reconnaître la forme canonique

Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x^2 - 20x + 10$.
Démontrer que $2(x-5)^2 - 40$ est la forme canonique de $f$.

**Méthode** : Déterminer la forme canonique

Écrire l'expression $2x^2 - 12x + 22$ sous sa forme canonique.

## 1.3 Sens de variations

**Propriété**

$\boxed{a > 0}$

| $x$ | $-\infty$ | | $\alpha$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | | $\searrow$ | $f(\alpha)$ | $\nearrow$ | |

La fonction $f$ est décroissante sur $]-\infty\,; \alpha]$ et croissante sur $[\alpha\,; +\infty[$.

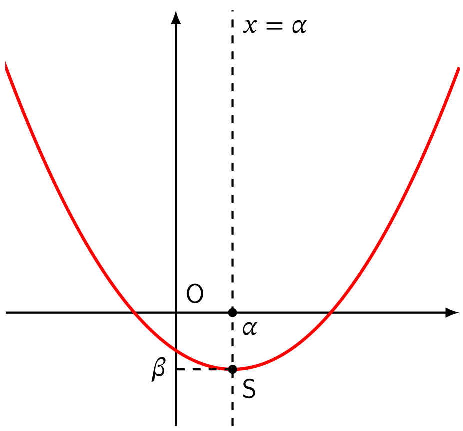
$\boxed{a < 0}$

| $x$ | $-\infty$ | | $\alpha$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | | $\nearrow$ | $f(\alpha)$ | $\searrow$ | |

La fonction $f$ est croissante sur $]-\infty\,; \alpha]$ et décroissante sur $[\alpha\,; +\infty[$.

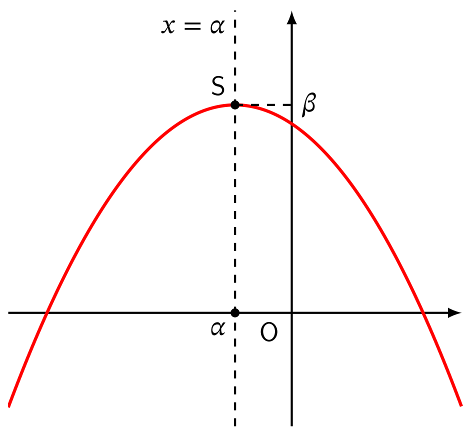
La courbe représentative d'une fonction polynôme de degré 2 s'appelle une parabole.
Dans un repère orthonormé la parabole admet pour axe de symétrie la droite d'équation $x = \alpha$ et pour sommet le point $S$ de coordonnées $(\alpha\ ;\ \beta)$.

$\boxed{a > 0}$




Les branches de la parabole $\mathcal{P}$ sont orientées vers le haut.

$\boxed{a < 0}$




Les branches de la parabole $\mathcal{P}$ sont orientées vers le bas.

**Méthode** : Déterminer l'extremum d'une fonction du second degré (1)

Déterminer l'extremum et la valeur où il est atteint de la fonction $f$ définie par $f(x) = -x^2 + 4x$.

**Méthode** : Déterminer l'extremum d'une fonction du second degré (2)

Soit $f$ la fonction définie par définie par $f(x) = 2x^2 - 12x + 23$.

1) Déterminer les coordonnées de l'extremum.
2) Dresser le tableau de variations.

**Méthode** : Déterminer les variations (et l'extremum) d'une fonction du second degré

Considérons le trinôme $f(x) = 2x^2 + 4x + 5$.

1) Démontrer que sa forme canonique est $2(x+1)^2 + 3$.
2) Dresser le tableau de variations et donner l'extremum de la fonction.

# 2 Équations du second degré

## 2.1 Définition

**Définition** : Équation du second degré

Une **équation du second degré** à coefficients réels est une équation de la forme $ax^2 + bx + c = 0$, avec $a$, $b$ et $c$ trois réels tels que $a \neq 0$.

**Définition** : Racines

Les solutions de l'équation du second degré $ax^2 + bx + c = 0$ sont appelées **les racines** du trinôme $ax^2 + bx + c$.

## 2.2 Résolution

**Définition** : Discriminant

Le réel $b^2 - 4ac$ est appelé **discriminant** du trinôme. On note $\Delta = b^2 - 4ac$.

**Propriété** : Résolution d'une équation du second degré

- $\Delta < 0$ l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ n'a pas de solution réelle.
- $\Delta = 0$ l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ a une seule solution : $x_0 = -\dfrac{b}{2a}$.
- $\Delta > 0$ l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ a deux solutions : $x_1 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$.

**Méthode** : Résoudre une équation du second degré

Résoudre l'équation $2x^2 - x - 6 = 0$.

---

Résoudre l'équation $2x^2 - 3x + \dfrac{9}{8} = 0$.

---

Résoudre l'équation $x^2 + 3x + 10 = 0$.

# 3 Propriété d'un trinôme

## 3.1 Somme et produit des racines

**Propriété** : Somme et produit des racines

Soit $f$ une fonction polynôme de degré 2 définie par $f(x) = ax^2 + bx + c$ dont le discriminant est strictement positif. $f$ a alors deux racines distinctes $x_1$ et $x_2$ et on a $x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a}$ et $x_1 \times x_2 = \dfrac{c}{a}$.

**Méthode** : Utiliser les formules de somme et produit de racines

Soit $f$ la fonction polynôme du second degré définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -2x^2 + x + 1$.

1) Montrer que $x_1 = 1$ est une racine de $f$.

2) Déterminer la deuxième racine.

## 3.2 Factorisation

**Propriété** : Factorisation d'un trinôme du second degré

- Si $\Delta < 0$ le trinôme $ax^2 + bx + c$ ne se factorise pas.
- Si $\Delta = 0$, en notant $x_0$ l'unique racine, on a : $ax^2 + bx + c = a\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2 = a(x - x_0)^2$.
- Si $\Delta > 0$, en notant $x_1$ et $x_2$ les deux racines, on a :$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$.

**Méthode** : Factoriser un trinôme

Factoriser le trinôme $f(x) = 4x^2 + 19x - 5$.

## 3.3 Signe

**Propriété** : Signe d'un trinôme du second degré

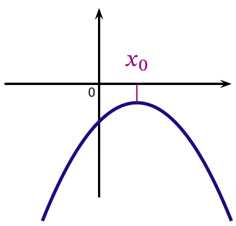
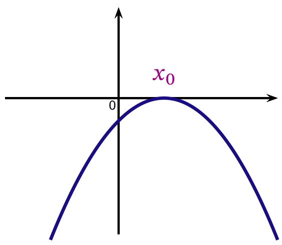
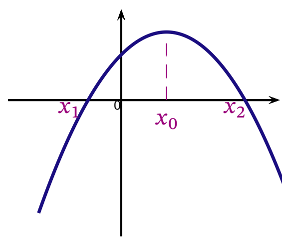
- Si $\Delta < 0$, alors le trinôme est du signe de $a$.
- Si $\Delta = 0$, alors le trinôme est du signe de $a$ et s'annule en $-\dfrac{b}{2a}$.
- Si $\Delta > 0$, le trinôme s'annule en deux réels distincts $x_1$ et $x_2$. Si $x_1 < x_2$, le tableau de signes du trinôme est :

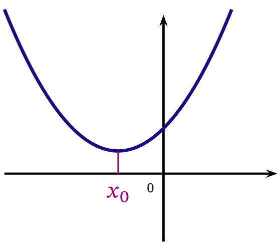
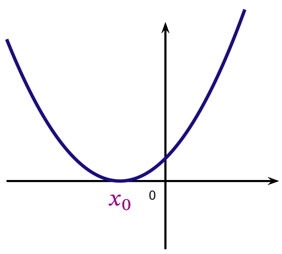
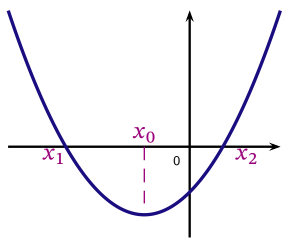
| $x$ | $-\infty$ | | $x_1$ | | $x_2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | | Signe de $a$ | $0$ | Signe de $-a$ | $0$ | Signe de $a$ | |

**Remarque**

Un trinôme $ax^2 + bx + c$ est du signe de $a$ sauf entre ses racines, si elles existent.

**Interprétations graphiques**

| $a < 0$ et $\Delta < 0$ | $a < 0$ et $\Delta = 0$ | $a < 0$ et $\Delta > 0$ |
|---|---|---|
| <br>Les images sont négatives. | <br>Les images sont négatives et $f(x_0) = 0$ | <br>Les images sont négatives sauf entre $x_1$ et $x_2$. |

| $a > 0$ et $\Delta < 0$ | $a > 0$ et $\Delta = 0$ | $a > 0$ et $\Delta > 0$ |
|---|---|---|
| <br>Les images sont positives. | <br>Les images sont positives et $f(x_0) = 0$ | <br>Les images sont positives sauf entre $x_1$ et $x_2$. |

**Méthode** : Déterminer le signe d'une fonction du 2nd degré donnée sous sa forme factorisée

1) Déterminer le signe de la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -2(x-4)(x+6)$.

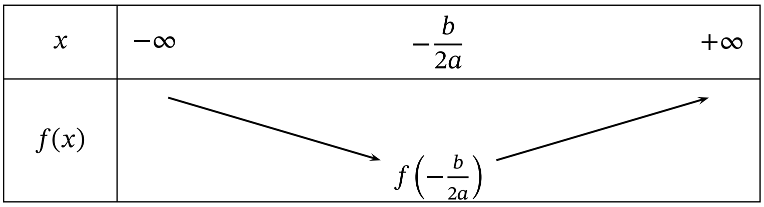
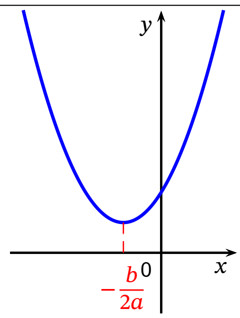
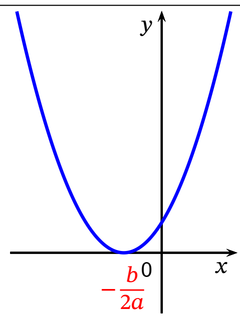
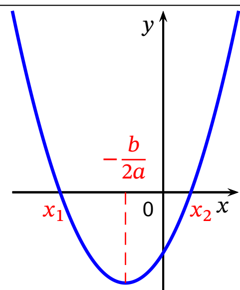
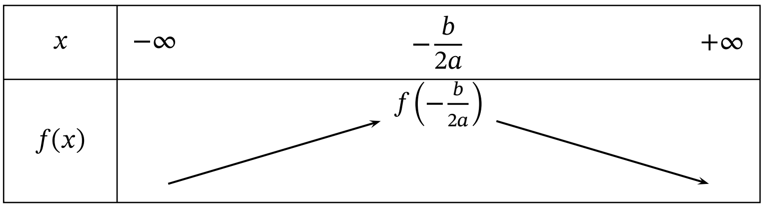
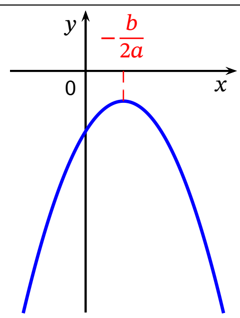
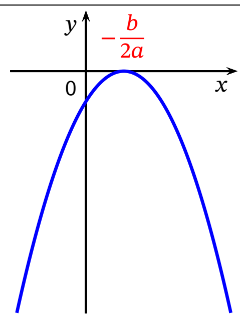
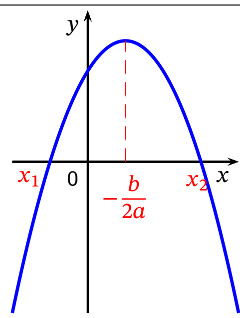
2) Étudier le signe du trinôme $f(x) = 2x^2 + 2x - 12$.

**Méthode** : Résoudre une inéquation en étudiant le signe d'un trinôme

Résoudre l'inéquation $-2x^2 + 6x + 6 < x^2 - 3$.

## 4 Bilan

$$f(x) = ax^2 + bx + c \text{ avec } a \neq 0$$

<table>
<tr><td colspan="2">Discriminant<br>$\Delta = b^2 - 4ac$</td><td>$\Delta < 0$</td><td>$\Delta = 0$</td><td>$\Delta > 0$</td></tr>
<tr><td rowspan="4">$a > 0$</td><td>Variations</td><td colspan="3"></td></tr>
<tr><td>Courbe</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>Solutions de<br>$ax^2 + bx + c = 0$</td><td>Pas de solution</td><td>Une solution :<br>$x_0 = -\frac{b}{2a}$</td><td>Deux solutions :<br>$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$<br>$x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$</td></tr>
<tr><td>Signe de<br>$ax^2 + bx + c$</td><td>Strictement positif sur $\mathbb{R}$</td><td>Positif sur $\mathbb{R}$</td><td>Positif sur<br>$]-\infty; x_1] \cup [x_2; +\infty[$<br>Négatif sur $[x_1; x_2]$</td></tr>
<tr><td rowspan="4">$a < 0$</td><td>Variations</td><td colspan="3"></td></tr>
<tr><td>Courbe</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>Solutions de<br>$ax^2 + bx + c = 0$</td><td>Pas de solution</td><td>Une solution :<br>$x_0 = -\frac{b}{2a}$</td><td>Deux solutions :<br>$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$<br>$x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$</td></tr>
<tr><td>Signe de<br>$ax^2 + bx + c$</td><td>Strictement négatif sur $\mathbb{R}$</td><td>Négatif sur $\mathbb{R}$</td><td>Négatif sur<br>$]-\infty; x_1] \cup [x_2; +\infty[$<br>Positif sur $[x_1; x_2]$</td></tr>
</table>