Cours & méthodes

Les suites

(Généralités)

2

ALGÈBRE

1 Définition

Définition : Suite

Une suite numérique est une fonction $u : n \longmapsto u(n)$ définie sur $\mathbb{N}$ (ou seulement pour $n \geqslant k$) et à valeurs dans $\mathbb{R}$. Le nombre réel $u(n)$, noté u_n est appelé le terme de rang n ou le terme général de la suite. On note cette suite (u_n) ou u tout simplement.

Exemple

- La suite (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = 2n^2 - 9$. Le premier terme est $u_0 = -9$.
- La suite (u_n) définie pour tout entier $n \geqslant 3$ par $u_n = \sqrt{n-3}$. Le premier terme est $u_3 = 0$.

Dans ces deux exemples, on a l'expression de u_n en fonction de n. On peut calculer directement n'importe quel terme en remplaçant n par le rang souhaité.
Dans ces cas, la suite est dite définie par une formule explicite.

Définition : Suite définie par une relation de récurrence

Définir une suite par une relation de récurrence, c'est donner un ou plusieurs premiers termes et une relation permettant de calculer un terme à partir d'un ou plusieurs termes précédents.

Remarque

- Il n'est pas toujours facile d'avoir une formule explicite d'une suite définie par récurrence.
- Il ne faut pas confondre u_{n+1}, qui désigne le terme suivant u_n , et $u_n + 1$, qui désigne le terme u_n auquel on ajoute 1.

Exemple

La suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_{n+1} = u_n^2 + 2u_n$.
Pour calculer un terme, on doit connaître le précédent. Par exemple, $u_{15} = u_{14}^2 + 2 \times u_{14}$.

Méthode : Calculer les premiers termes d'une suite (1)

Calculer les premiers termes des suites suivantes :

1) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 3n^2 - 1$.

2) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = 2v_n - 1$ et $v_0 = 2$.

Méthode : Calculer les premiers termes d'une suite (2)

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = u_n + 2n$.
Calculer les termes u_1, u_2 ey u_3.

Méthode : Déterminer l'expression d'une suite

1) Déterminer la forme explicite (u_n en fonction de n) d'une suite dont les premiers termes sont : 0 ; $\frac{1}{2}$; $\frac{2}{3}$; $\frac{3}{4}$; $\frac{4}{5}$
2) Déterminer la forme de récurrence (u_{n+1} en fonction de u_n) d'une suite dont les premiers termes sont : 0 ; 2 ; 6 ; 12 ; 20

Méthode : Modéliser une situation à l'aide d'une suite

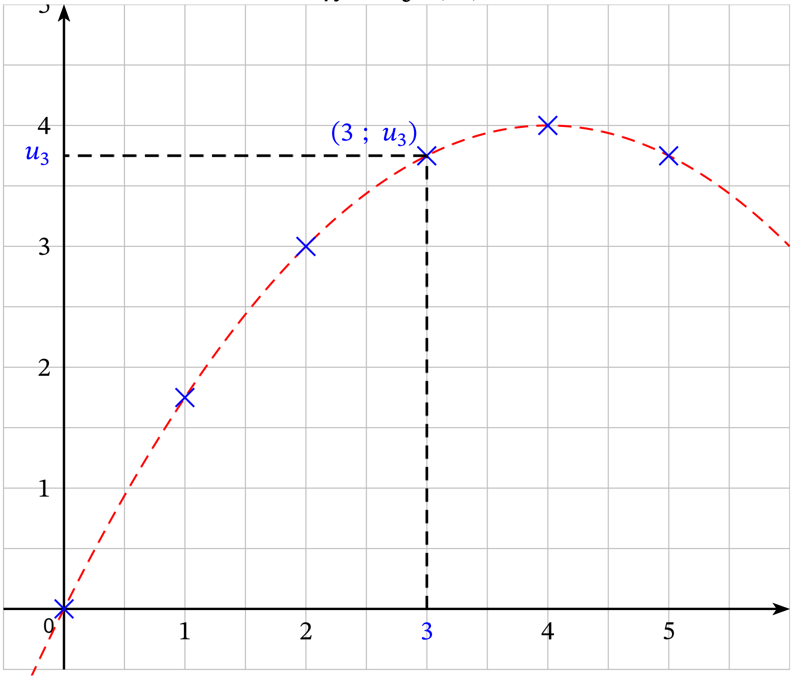
1) On associe à chaque entier naturel n son triple. On note u_n le résultat obtenu.
   a) Exprimer u_n en fonction de n.
   b) Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n.
   c) Quelle est la valeur de u_{31} ?
2) Chaque année , un magazine perd la moitié de ses abonnés et en gagne 150 nouveaux. En 2019, ce magazine compte 120 000 abonnés. On note pour tout entier naturel n, u_n le nombre d'abonnés en $2019 + n$ et donc $u_0 = 120000$.
   a) Donner la valeur de u_1 et interpréter cette valeur.
   b) Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n.
3) Soit une suite (v_n) définie par :
   Pour tout entier naturel n, le terme d'indice n est égal au carré de son rang auquel on soustrait 3.
   Donner l'expression de v_n.
4) Une ville compte 2 000 habitants en 2019.
   Elle enregistre chaque année une perte de 2 % d'habitants.
   A l'aide d'une suite, modéliser cette situation pour estimer le nombre d'habitants dans n années.

2 Représentations graphiques

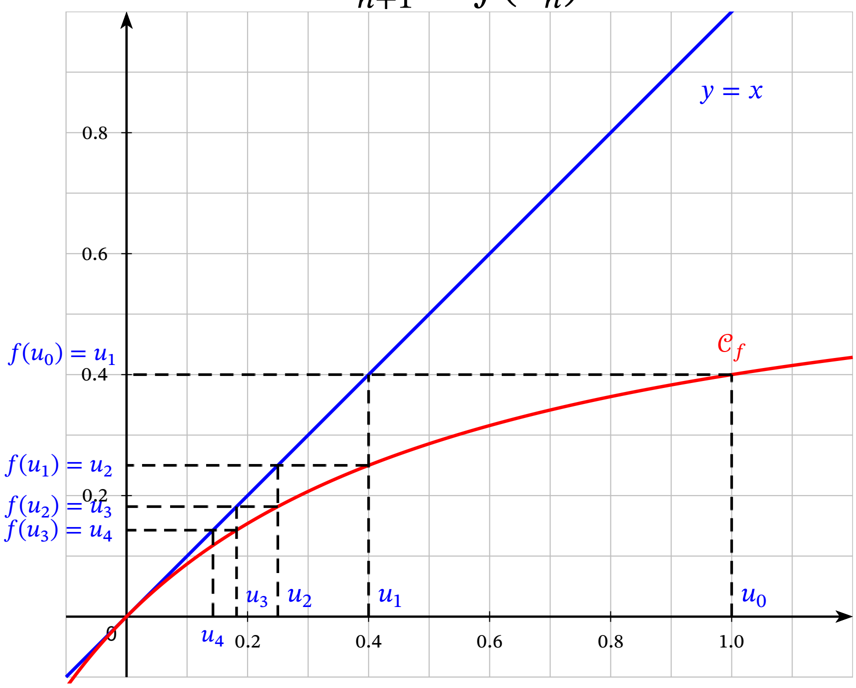
Propriété : Représentations graphiques

- Dans un repère, on place les points de coordonnées $(n\ ;\ u_n)$.
  Si la suite est définie par $u_n = f(n)$, alors u_n est l'ordonnée du point d'abscisse n de la courbe représentative de la fonction f.
- Si la suite est définie par $u_{n+1} = f(u_n)$, alors on construit les termes à l'aide de la courbe de représentative de la fonction f et de la droite d'équation $y = x$.

Cas $u_n = f(n)$



Cas $u_{n+1} = f(u_n)$



Méthode : Représenter graphiquement une suite

Représenter graphiquement la suite (u_n) définie par $u_n = \dfrac{n^2}{2} - 3$ par un nuage de points.