Cours & méthodes

Comportement d'une suite

10

ALGÈBRE

1 Sens de variation d'une suite

1.1 Définition

Définition

- On dit qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **croissante** si et seulement si : pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} \geqslant u_n$.
- On dit qu'une suite (u_n) est **décroissante** si et seulement si : pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} \leqslant u_n$.
- On dit que la suite (u_n) est **constante** si et seulement si pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n$.
- Une suite est dite **monotone** lorsqu'elle est croissante ou décroissante.

Méthode : Étudier le sens de variation d'une suite

On donne la suite u définie par $u_n = n^2 - 4n + 4$.
Démontrer que la suite u est croissante à partir d'un certain rang.

Méthode : Étudier le sens de variation d'une suite

On donne la suite u définie par $u_n = \dfrac{1}{n(n+1)}$. Démontrer que la suite u est décroissante.

1.2 Variations d'une suite arithmétique

Propriété

Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r. Alors :

- si $r > 0$, u est strictement croissante ;
- si $r < 0$, u est strictement décroissante ;

- si $r = 0$, u est constante.

Méthode : Étudier le sens de variation d'une suite arithmétique

Étudier les variations des suites arithmétiques u et v définies par :

1) $u_n = 3 + 5n$.

2) $\begin{cases} v_{n+1} = v_n - 4 \\ v_0 = -3 \end{cases}$

1.3 Variations d'une suite géométrique

Propriété

Soit u une suite géométrique de raison q telle que $q > 0$, $q \neq 0$ et $q \neq 1$. Alors, si $u_0 > 0$:

- si $0 < q < 1$, u est strictement décroissante ;
- si $q > 1$, u est strictement croissante ;
- si $q = 1$, u est constante.

Méthode : Étudier le sens de variation d'une suite géométrique

Étudier les variations des suites géométriques u et v définies par :

1) $u_n = -4 \times 2^n$.

2) $\begin{cases} v_{n+1} = \dfrac{1}{2} v_n \\ v_0 = -2 \end{cases}$

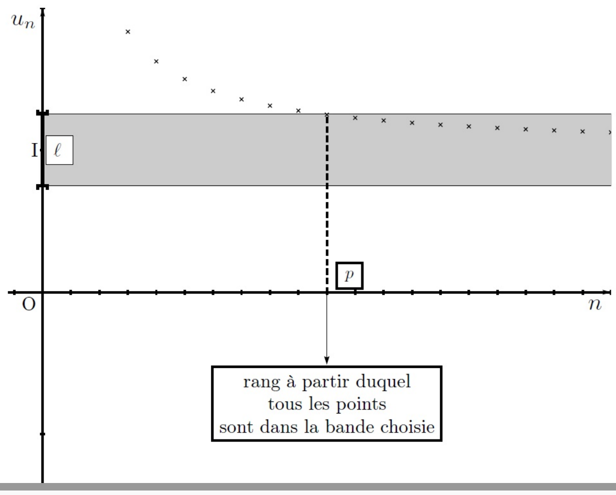
2 Notion de limite

2.1 Approche

S'intéresser à la limite d'une suite u, c'est étudier le comportement des termes u_n lorsque n prend des valeurs de plus en plus grandes. Des exemples nous permettent de conjecturer diverses situations.

2.2 Suites ayant pour limite un nombre réel

Une suite u a pour limite un nombre réel ℓ quand n tend vers $+\infty$, si tous les termes u_n deviennent aussi proches de ℓ que l'on veut, à condition de prendre n suffisamment grand.

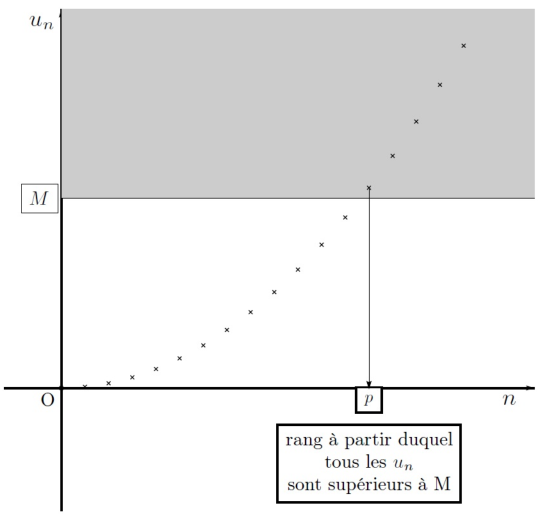


Exemple

$u_n = \dfrac{1}{n}$: sa limite est 0 (on peut rendre $\dfrac{1}{n}$ aussi proche de 0 que l'on veut à condition de prendre n suffisamment grand).

2.3 Suites ayant pour limite $+\infty$ ou $-\infty$

Une suite u a pour limite $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$, si ses termes u_n deviennent aussi grand que l'on veut à condition de prendre n suffisamment grand.



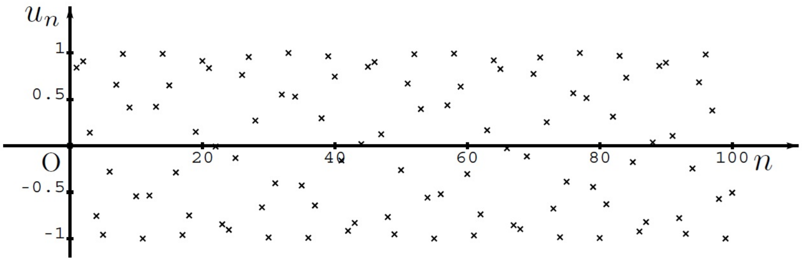
Exemple

$u_n = n^2$. Sa limite est $+\infty$. Pour tout réel M, on peut rendre $n^2 \geq M$ à condition de prendre n suffisamment grand.

2.4 Suites n'ayant pas de limite

Certaines suites n'ont pas de limite.

Par exemple, la suite u définie par $u_n = \sin n$ pour $n \geqslant 0$ et représentée ci-dessous n'a pas de limite quand n tend vers $+\infty$.



Méthode : Déterminer la limite d'une suite

On considère les suites u et v définies par :

$u_n = \dfrac{2n+1}{n}$ et $v_n = n^2 + 1$.

Conjecturer les limites de ces deux suites.