Dérivation

Fonction dérivée

Notations

Si $y = f(x)$ alors $f'(x) = \frac{dy}{dx}$

Si $x = f(t)$ alors $f'(t) = \frac{dx}{dt}$

Interprétation

A chaque point d'abscisse x, la fonction dérivée associe le coef. directeur (la pente) de la tangente en ce point.

Fonctions de références

$f(x) = x^n \quad f'(x) = nx^{n-1}$

Fonction	Fonction dérivée	Ensemble de dérivation
$f(x) = constante$	$f'(x) = 0$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x$	$f'(x) = 1$	$\mathbb{R}$
$f(x) = mx + p$	$f'(x) = m$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x^2$	$f'(x) = 2x$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x^3$	$f'(x) = 3x^2$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x^n$	$f'(x) = nx^{n-1}$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \frac{1}{x}$	$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$	$\mathbb{R}^* =]-\infty ; 0[\cup]0 ; +\infty[$
$f(x) = \frac{1}{x^n}$	$f'(x) = -\frac{n}{x^{n+1}}$	$\mathbb{R}^* =]-\infty ; 0[\cup]0 ; +\infty[$
$f(x) = \sqrt{x}$	$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\mathbb{R}^{*+} =]0 ; +\infty[$
$f(x) = e^x$	$f'(x) = e^x$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \sin(x)$	$f'(x) = cos(x)$	$\mathbb{R}$
$f(x) = cos(x)$	$f'(x) = -\sin(x)$	$\mathbb{R}$

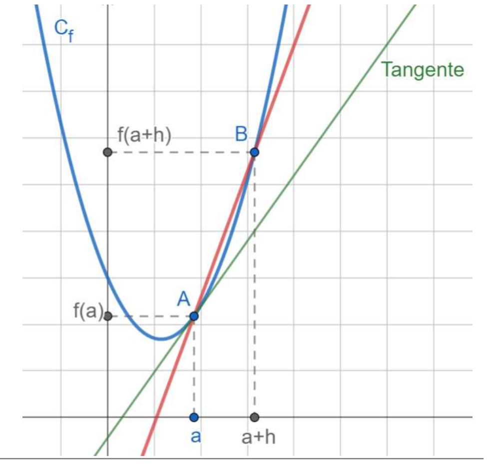
Combinaisons de fonctions

Type d'opération	Fonction	Fonction dérivée
$Fonction\ 1 + Fonction\ 2$	$f = u + v$	$f' = u' + v'$
$Constante \times Fonction$	$f = k \times u$	$f' = k \times u'$
$Fonction\ 1 \times Fonction\ 2$	$f = u \times v$	$f' = u'v + uv'$
$Inverse\ d'une\ fonction$	$f = \frac{1}{v}$	$f' = -\frac{v'}{v^2}$
$\frac{Fonction\ 1}{Fonction\ 2}$	$f = \frac{u}{v}$	$f' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$
Fonction composée	$f = g(u)$	$f' = u' \times g'(u)$

Nombre dérivé

Coef. directeur $= \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$

Rappel : coefficient directeur d'une droite



$= \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$

Taux de variation

démonstration

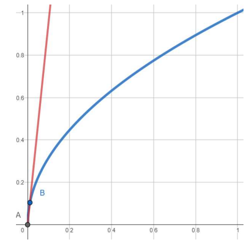
Nombre dérivé

$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$

Le nombre dérivé au point d'abscisse a est le coef. directeur de la tangente en a

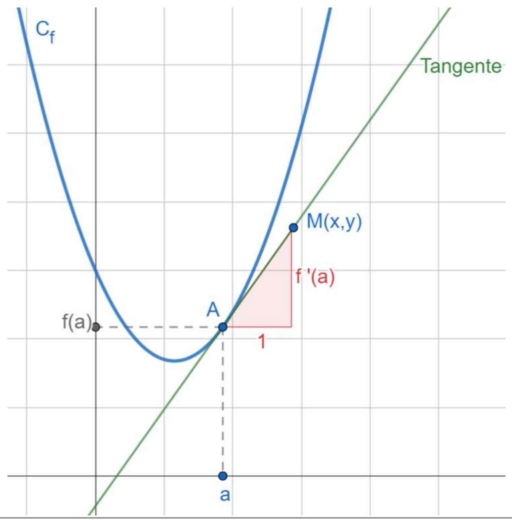
Cas où la limite n'existe pas

$f(x) = \sqrt{x}$



Fonction non dérivable au point d'abscisse 0

Tangente



$f'(a) = \frac{y - f(a)}{x - a}$ d'où

$y = f'(a)(x - a) + f(a)$

Application

Interprétation

Si la pente de la tangente est positive en un point, alors la fonction est croissante au voisinage de ce point. Et inversement.

idem : "pente négative" ssi "fonction décroissante"

idem : "pente nulle" ssi "fonction constante"

Théorème : lien entre sens de variation de la fonction et signe de la fonction dérivée

x	a	b
Signe de $f'(x)$	0	
Variation de f	→	

f est constante ssi f ' est nulle

x	a	b
Signe de $f'(x)$	$+$	
Variation de f	↗	

f est croissante ssi f ' est positive

x	a	b
Signe de $f'(x)$	$-$	
Variation de f	↘	

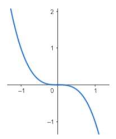
f est décroissante ssi f ' est négative

Extremum local

x	a		α		β		b
Signe de $f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$+$	
Variation de f		↘	Min. local	↗	Max. local	↘	

la dérivée s'annule en changeant de signe ssi on a un extremum

x	a		α		b
Signe de $f'(x)$		$-$	0	$-$	
Variation de f		↘			



Pas d'extremum ici

cyril.lascassies@ac-toulouse.fr