Parcours d'exercices

Probabilités conditionnelles

5

PROBABILITES

Ce parcours d'exercices appartient à : ....

Parcours 1

1 - 2 - 3 - 4 - 5 - 6 - 7 - 8 - 9 - 10 - 11 - 12 - 13 - 14 - 15 - 16 - 17 - 18 - 19 - 20 - 21 - 22

29 - 28 - 27 - 26 - 25 - 24 - 23

Parcours 2

1 - 2 - 3 - 4 - 5 - 6 - 7 - 8 - 9 - 10 - 11 - 12 - 13 - 14 - 15 - 16 - 17 - 18 - 19 - 20 - 21 - 22

29 - 28 - 27 - 26 - 25 - 24 - 23

Parcours 3

1 - 2 - 3 - 4 - 5 - 6 - 7 - 8 - 9 - 10 - 11 - 12 - 13 - 14 - 15 - 16 - 17 - 18 - 19 - 20 - 21 - 22

29 - 28 - 27 - 26 - 25 - 24 - 23

1 Vocabulaire/notations

Exercice 1

Quand on tire une personne au hasard dans la population, on considère les événements :

- L : « La personne est lycéenne.»
- F : « La personne est fonctionnaire.»
- R : « La personne aime la rhubarbe.»

1) a) Décrire la probabilité $p_L(R)$ par une phrase.

b) Même question pour $p_R(\overline{\text{F}})$.

2) a) Écrire la probabilité que la personne soit lycéenne sachant qu'elle n'aime pas la rhubarbe.

b) Même question pour la probabilité que la personne n'aime pas la rhubarbe sachant qu'elle est fonctionnaire.

Sesamath

Exercice 2

1) On choisit au hasard un jour de l'année. On considère les événements :

- P : « le jour choisi a été pluvieux » ;
- V : « le jour choisi a été venté » ;

Pour chacune des informations suivantes, indiquer si elle correspond, ou non, à une probabilité conditionnelle, et donner la notation correspondant à cette probabilité.

a) Dans l'année, 40 % des jours sont pluvieux.

b) 66 % des jours pluvieux sont ventés.

c) Parmi les jours non ventés, 22 % sont pluvieux.

d) 49 % des jours dans l'année n'ont été ni ventés, ni pluvieux.

2) On choisit une personne au hasard dans un groupe constitué de garçons et de filles. On considère les événements suivants :
F : "la personne choisie est une fille" et S : "la personne choisie pratique un sport en club".

a) Traduire les propositions suivantes en utilisant les notations de probabilités :

- Dans ce groupe il y a 8 % de filles qui font du sport en club.
- Le sport est pratiqué en club pour 40 % des garçons.
- Il y a 32 % des personnes qui font du sport en club.
- Parmi ceux qui pratiquent un sport en club, il y a 25 % de filles.

b) Traduire en langage naturel les égalités :

- $P(\bar{F} \cap S) = 0,24$
- $P_S(\bar{F}) = 0,75$

2 Arbres/Tableaux

Exercice 3

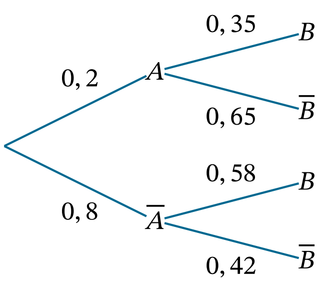
On considère une urne contenant deux boules rouges et cinq boules vertes. On effectue deux tirages successifs au hasard sans remise. On note R_i l'événement "On a tiré une boule rouge au i-ième tirage" et V_i l'événement "on a tiré une boule verte au i-ième tirage".
Construire un arbre pondéré représentant cette situation, puis calculer la probabilité de tirer deux boules de couleurs différentes.

Exercice 4

Dans une classe de 32 élèves, il y a 15 garçons et 28 demi-pensionnaires. 12 garçons sont demi-pensionnaires.
Construire un tableau des effectifs en fonction de ces deux critères.
On choisit un élève de cette classe au hasard, quelle est la probabilité de choisir une fille sachant qu'elle est demi-pensionnaire.

Exercice 5

Dans l'arbre ci-dessous, exprimer chacune des pondérations comme une probabilité (par exemple $0,65 = P_A\left(\overline{B}\right)$).



Exercice 6

On considère deux évènements R et S tels que :
$P(R) = \dfrac{1}{4}$, $P_R(S) = \dfrac{5}{6}$ et $P_{\overline{R}}\left(\overline{S}\right) = \dfrac{11}{12}$.
Construire un arbre pondéré avec R et S.

Exercice 7

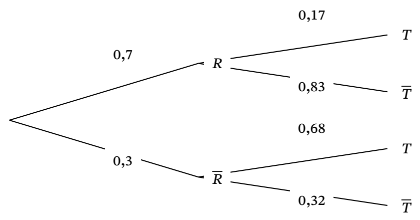
Dans un stock de pommes provenant de deux fournisseurs (A et B), on prend au hasard une pomme. On note :
A : « La pomme provient du fournisseur A » ;
C : « La pomme est commercialisable ».
35 % des pommes proviennent du fournisseur A et ne sont pas commercialisables.

Mathalea

En utilisant les événements A et C, déterminer la probabilité qui vaut 0,35

Exercice 8

On donne l'arbre de probabilités :

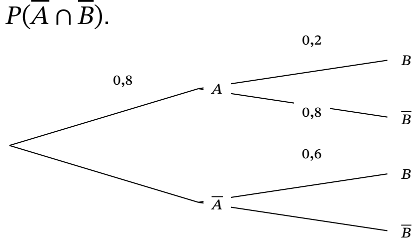


Déterminer la probabilité qui est égale à 0,3

Mathalea

Exercice 9

A partir de l'arbre de probabilités ci-dessous, calculer $P(\overline{A} \cap \overline{B})$.



Mathalea

Exercice 10

Dans un lycée, 60 % des élèves ont une calculatrice graphique dont 80% sont de marque A.
On emprunte la calculatrice d'un élève au hasard et on considère les événements suivants :

- G : « Sa calculatrice est graphique. »
- A : « Sa calculatrice est de marque A »

Quelle est la probabilité que ce soit une calculatrice graphique de marque A ?

Sésamath

Exercice 11

Dans ce tableau, on note :
F : « La personne est une fille »
et V : « La personne a plus de 20 ans ».
On choisit une personne au hasard.

	F	$\overline{F}$	Total
V	6	44	50
$\overline{V}$	56	59	115
Total	62	103	165

Déterminer $P_{\overline{V}}(\overline{F})$.

Mathalea

Exercice 12

Dans une boulangerie, on dispose d'une réduction si l'on choisit la formule « dessert mystère » pour laquelle le dessert accompagnant le menu est tiré au hasard.

Ceyda choisit cette formule alors que les desserts encore disponibles sont répartis comme suit.

	Chocolat	Vanille	Total
Tartelette	8	11	19
Éclair	13	7	20
Total	21	18	39

On considère les événements E : « Son dessert est un éclair » et V : «Son dessert est à la vanille. »

1. Calculer $p_{\mathrm{E}}(\mathrm{V})$, $p_{\mathrm{V}}(\mathrm{E})$, $p_{\overline{\mathrm{E}}}(\mathrm{V})$.

2. Ceyda voit que son dessert est un éclair.
Écrire la probabilité qu'il soit au chocolat comme une probabilité conditionnelle puis la calculer.

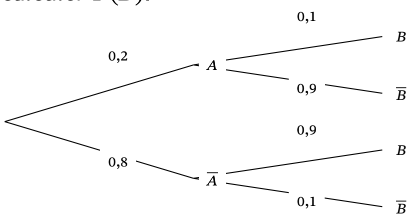
3 Probabilités totales

Exercice 13

Soient A et B deux événements tels que $\mathrm{P}(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) = \dfrac{1}{3}$ et $\mathrm{P}(\mathrm{A} \cap \overline{\mathrm{B}}) = \dfrac{1}{5}$. Que vaut $\mathrm{P}(\mathrm{A})$?

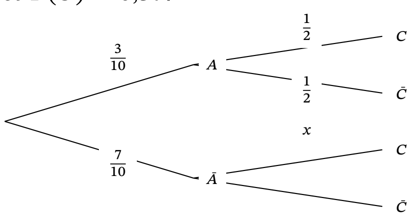
Exercice 14

A partir de l'arbre de probabilités ci-dessous, calculer $P(\overline{B})$.



Exercice 15

On donne l'arbre de probabilités ci-dessous et $P(C) = 0{,}57$.



Déterminer la valeur de x.

Exercice 16

Pour ses révisions, un élève utilise des annales de mathématiques. Dans ces annales, 10 % des exercices sont des QCM, 22 % des exercices ont des questions sur les probabilités et 4 % sont des QCM qui ont des questions sur les probabilités.
L'élève choisi au hasard un exercice dans la liste.
On définit les événements suivants :

- Q : « l'exercice choisi est un QCM » ;
- R : « l'exercice choisi a des questions sur des probabilités ».

1) Donner les probabilités indiquées dans l'énoncé.
2) Calculer $P_Q(R)$ et $P_R(Q)$ et préciser par une phrase à quoi correspondent chacune de ces probabilités.
3) Réaliser un arbre pondéré.

Exercice 17

On s'intéresse à la clientèle d'un musée. Chaque visiteur peut acheter son billet sur internet avant sa visite ou l'acheter aux caisses du musée à son arrivée.
Pour l'instant, la location d'un audioguide pour la visite n'est possible qu'aux caisses du musée. Le directeur s'interroge sur la pertinence de proposer la réservation des audioguides sur internet. Une étude est réalisée. Elle révèle que :

- 70 % des clients achètent leur billet sur internet ;
- parmi les clients achetant leur billet sur internet, 35 % choisissent à leur arrivée au musée une visite avec un audioguide ;
- parmi les clients achetant leur billet aux caisses du musée, 55 % choisissent une visite avec un audioguide.

On choisit au hasard un client du musée. On considère les évènements suivants :

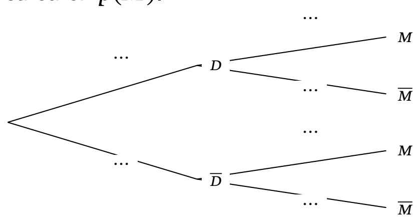
- A : « Le client choisit une visite avec un audioguide » ;
- B : « Le client achète son billet sur internet avant sa visite ».

1) Représenter la situation à l'aide d'un arbre pondéré.
2) Calculer la probabilité que le client choisisse une visite avec un audioguide.

Exercice 18

Lorsque le basketteur Stephen Curry tire en match, il y a 53% de chance que ce soit un tir à 2 points et 47% que ce soit un tir à 3 points. De plus, quand il tire à 2 points, son pourcentage de réussite est de $51,5\%$ contre $43,5\%$ à 3 points.
Lorsque Curry tire en match, on considère les événe-

ments D : « Il tire à 2 points »
et M : «Il marque. »
Recopier et compléter l'arbre pondéré ci-dessous puis calculer $p(M)$.



Exercice 19

Dans cet exercice, les résultats seront arrondis à 10^{-3} si nécessaire.
On rappelle que le triathlon est une discipline qui comporte trois sports : la natation, le cyclisme et la course à pied.
Fabien s'entraîne tous les jours pour un triathlon et organise son entraînement de la façon suivante :

- chaque entraînement est composé d'un ou deux sports et commence toujours par une séance de course à pied ou de vélo ;
- lorsqu'il commence par une séance de course à pied, il enchaîne avec une séance de natation avec une probabilité de $0,4$;
- lorsqu'il commence par une séance de vélo, il enchaîne avec une séance de natation avec une probabilité de $0,8$.

Un jour d'entraînement, la probabilité que Fabien pratique une séance de vélo est de $0,3$. On note :

- C l'évènement : « Fabien commence par une séance de course à pied » ;
- V l'évènement : « Fabien commence par une séance de vélo » ;
- N l'évènement : « Fabien enchaîne par une séance de natation ».

1) Réaliser un arbre pour modéliser la situation.
2) Quelle est la probabilité que Fabien commence par une séance de course à pied et enchaîne par une séance de natation ?
3) Démontrer que : $P(N) = 0,52$.
4) Sachant que Fabien n'a pas fait de séance de natation, quelle est la probabilité qu'il ait commencé son entraînement par une séance de vélo ?

Bac

Exercice 20

Une urne contient six jetons rouges dont un est marqué « gagnant » et quatre jetons verts dont trois d'entre eux sont marqués « gagnant ».
On tire au hasard un jeton de l'urne et on note les évènements :

R : « le jeton tiré est rouge »,

V : « le jeton tiré est vert »,

G : « le jeton tiré est gagnant ».

1) Modéliser la situation à l'aide d'un arbre de probabilité.
2) Calculer la probabilité de l'évènement « le jeton tiré est un jeton vert et marqué gagnant f».
3) Soit $P(G)$ la probabilité de tirer un jeton gagnant. Montrer que $P(G) = \dfrac{2}{5}$.
4) Sachant que le jeton tiré est gagnant, calculer la probabilité qu'il soit de couleur rouge.
5) On tire maintenant, toujours au hasard et simultanément, deux jetons dans l'urne.
Calculer la probabilité que les deux jetons soient marqués « gagnant ».
Expliquer votre démarche.

Sujet E3C

4 Indépendance

Exercice 21

On considère deux événements A et B tels que $p(\text{ A}) = 0,3$, $p(\text{ B}) = 0,6$ et $p(\text{ A} \cap \text{B}) = 0,2$. Les événements A et B sont-ils indépendants ?

Exercice 22

A et B sont deux évènements, et on donne :
$P(A) = \dfrac{3}{7}$, $P(B) = \dfrac{3}{20}$, $P(A \cup B) = \dfrac{4}{7}$.

1) Calculer $p(A \cap B)$
2) A et B sont-ils des évènements indépendants ?
3) Calculer $P_A(B)$ et $P_B(A)$

E3C

Exercice 23

Dans un magasin de meubles, il y a 55 % de canapés dont 14 % en cuir, 30 % de fauteuils dont 20 % en cuir et le reste est constitué de poufs dont 42 % en cuir.
Un client se présente et choisit un meuble.
On considère les évènements :

- F : « le meuble choisi est un fauteuil » ;
- C : « le meuble choisi est en cuir ».

Montrer que ces deux évènements sont indépendants.

5 S'entaîner/Approfondir

Exercice 24

Une agence de voyage propose deux formules week-end pour se rendre à Londres depuis Paris.
Les clients choisissent leur moyen de transport : train ou avion.
De plus, s'ils le souhaitent, ils peuvent compléter leur formule par l'option « visites guidées ».
Une étude a produit les données suivantes :

- 61 % des clients optent pour l'avion ;
- Parmi les clients ayant choisi le train, 69 % choisissent aussi l'option « visites guidées ».
- 44 % des clients ont choisi à la fois l'avion et l'option « visites guidées ».

On interroge au hasard un client de l'agence ayant souscrit à une formule week-end à Londres.
On considère les évènements suivants :

- A : le client a choisi l'avion.
- V : le client a choisi l'option « visites guidées ».

1) Déterminer $P_A(V)$.
2) Démontrer que la probabilité pour que le client interrogé ait choisi l'option « visites guidées » est environ égale à 0,709.
3) Calculer la probabilité pour que le client interrogé ait pris l'avion sachant qu'il n'a pas choisi l'option « visites guidées ». Arrondir le résultat au centième.
4) On interroge au hasard deux clients de manière aléatoire et indépendante. Quelle est la probabilité qu'aucun des deux ne prennent l'option « visites guidées » ? On donnera les résultats sous forme de valeurs approchées à 10^{-3} près.

Mathalea

Exercice 25

Une chaîne de salons de coiffure propose à ses clients qui viennent pour une coupe deux prestations supplémentaires cumulables :

- une coloration naturelle à base de plantes appelée « couleur-soin »,
- des mèches blondes pour donner du relief à la chevelure, appelées « effet coup de soleil ».

Il apparaît que 40 % des clients demandent une « couleur-soin ». Parmi ceux qui ne veulent pas de « couleur soin », 30 % des clients demandent un « effet coup de soleil ». Par ailleurs, 24 % des clients demandent une « couleur soin »et un « effet coup de soleil ».
On interroge un client au hasard.

E3C

On notera C l'évènement « Le client souhaite une "couleur-soin." ».
On notera E l'évènement « Le client souhaite un "effet coup de soleil." ».

1) Donner les valeurs de $P(C)$, $P(C \cap E)$ et $P_{\overline{C}}(E)$.
2) Calculer la probabilité que le client ne souhaite ni une « couleur-soin », ni un « effet coup de soleil ».
3) Montrer que la probabilité de l'évènement E est égale à $0,42$.
4) Les évènements C et E sont-ils indépendants ?

Exercice 26

Dans un supermarché, on réalise une étude sur la vente de bouteilles de jus de fruits sur une période d'un mois.

- 40 % des bouteilles vendues sont des bouteilles de jus d'orange ;
- 25 % des bouteilles de jus d'orange vendues possèdent l'appellation « pur jus ».

Parmi les bouteilles qui ne sont pas de jus d'orange, la proportion des bouteilles de « pur jus » est notée x, où x est un réel de l'intervalle [0 ; 1].
Par ailleurs, 20 % des bouteilles de jus de fruits vendues possèdent l'appellation « pur jus ».
On prélève au hasard une bouteille de jus de fruits passée en caisse. On définit les évènements suivants :
R : la bouteille prélevée est une bouteille de jus d'orange ;
J : la bouteille prélevée est une bouteille de « pur jus ».

1) Représenter cette situation à l'aide d'un arbre pondéré.
2) Déterminer la valeur exacte de x.
3) Une bouteille passée en caisse et prélevée au hasard est une bouteille de « pur jus ».
   Calculer la probabilité que ce soit une bouteille de jus d'orange.

Exercice 27

Soit un test supposé dépister une maladie dans une population donnée. On note, pour un individu donné, M l'événement« être malade » et T l'événement « avoir un test positif ». On appelle **valeur diagnostique du test** la probabilité qu'un individu soit malade sachant que le test est positif. On note t le pourcentage d'individus malades dans la population et v la valeur diagnostique du test.
Le fabriquant du test indique que :

- la probabilité qu'un individu malade ait un test positif est 0,99 ;

- la probabilité qu'un individu non malade ait un test négatif est 0,99.

1) Réaliser un arbre de probabilité, puis exprimer v et t avec les notations de probabilités.
2) Montrer que $p(\overline{M} \cap T) = 0,01(1-t)$.
3) En déduire que $p(T) = 0,98t + 0,01$.
4) Montrer que $v = \dfrac{99t}{98t+1}$.
5) Etudier la fonction f, définie sur $[0\ ;\ 1]$, par :

$$f(t) = \frac{99t}{98t+1}$$

6) Que peut-on dire de la valeur diagnostique du test pour les maladies rares, c'est-à-dire quand t est proche de 0 ? A partir de quelle valeur de t la valeur diagnostique du test est-elle supérieure à 0,9 ?

Exercice 28

Dans une ville, une enquête portant sur les habitudes des ménages en matière d'écologie a donné les résultats suivants :

- 70 % des ménages pratiquent le tri sélectif ;
- parmi les ménages pratiquant le tri sélectif, 40 % consomment des produits bio ;
- parmi les ménages ne pratiquant pas le tri sélectif, 10 % consomment des produits bio.

On choisit un ménage au hasard (tous les ménages ayant la même probabilité d'être choisis) et on note :
T l'évènement « le ménage pratique le tri sélectif » et $\overline{T}$ son évènement contraire ;
B l'évènement « le ménage consomme des produits bio » et $\overline{B}$ son évènement contraire.

1) a) Donner sans justification la probabilité $p(T)$ de l'évènement T.
   b) Donner sans justification $p_T(B)$ et $p_{\overline{T}}(B)$
2) Représenter la situation à l'aide d'un arbre pondéré.
3) a) Calculer la probabilité de l'évènement : « le ménage pratique le tri sélectif et consomme des produits bio ».
   b) Montrer que la probabilité que le ménage consomme des produits bio est égale à 0,31.
4) Calculer la probabilité que le ménage pratique le tri sélectif sachant qu'il consomme des produits bio (arrondir au centième).
5) Les évènements T et B sont-ils indépendants ?
6) Calculer la probabilité de l'évènement $T \cup B$ puis interpréter ce résultat.
7) Cette ville décide de valoriser les ménages ayant un comportement éco-citoyen. Pour cela, elle donne chaque année un chèque de 20 € aux ménages qui pratiquent le tri sélectif et un chèque de 10 € aux ménages qui consomment des produits bio sur présentation de justificatifs (les deux montants peuvent être cumulés).
   a) Quelles sont les différentes sommes versées par cette ville à un habitant ? (on n'attend pas de justification).
   b) Compléter le tableau suivant :

Sommes versées				
Probabilités				

Exercice 29 : Contrôle anti-dopage

Dans un certain sport, on considère que 2 % des sportifs se dopent.
Un test anti-dopage répond aux spécificités suivantes :

- si un sportif se dope, le test est positif dans 99 % des cas ;
- si un sportif ne se dope pas, le test est négatif dans 99,9 % des cas.

1) Déterminer la probabilité qu'un sportif pris au hasard soit contrôlé positif avec ce test.
2) Si un sportif est contrôlé positif à ce test, on fait un deuxième test : si celui-ci est également positif, le sportif est déclaré coupable, sinon, il est innocenté.
   On choisit un sportif subissant un contrôle anti-dopage et on considère les évènements :
   - D : « le sportif est dopé » ;
   - P_1 : « le premier test est positif » ;
   - P_2 : « le deuxième test est positif ».
   a) Montrer que la probabilité que le sportif soit déclaré coupable est 0,01960298 en admettant que $P_{D\cap P_1}(P_2) = P_D(P_2)$ et $P_{\overline{D}\cap P_1}(P_2) = P_{\overline{D}}(P_2)$.
   b) Un officiel affirme : « avec ce protocole, il est presque impossible qu'un sportif soit déclaré coupable à tort ». Commenter cette affirmation.

(Correction)

Corrigé de l'exercice 1

1\. a) $p_{\mathrm{L}}(\mathrm{R})$ est la probabilité que la personne aime la rhubarbe sachant qu'elle est lycéenne.

b) $p_R(\bar{F})$ est la probabilité que la personne ne soit pas fonctionnaire sachant qu'elle aime la rhubarbe.

2.a) La probabilité que la personne soit lycéenne sachant qu'elle n'est pas fonctionnaire est $p_{\bar{R}}(L)$.

b) La probabilité que la personne n'aime pas la rhubarbe sachant qu'elle est fonctionnaire est $p_{\mathrm{F}}(\overline{\mathrm{R}})$.

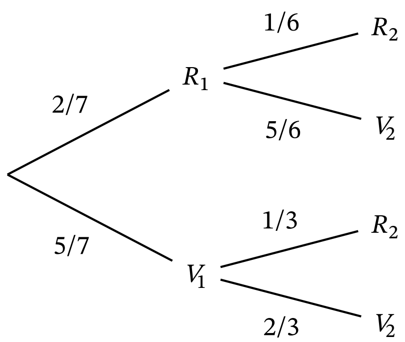
Corrigé de l'exercice 2

1) a) Non, $P(P) = 0,4$.
   b) Oui, $P_P(V) = 0,66$.
   c) Oui, $P_{\bar{V}}(P) = 0,22$.
   d) Non, $P(\bar{V} \cap \bar{P}) = 0,49$.

2) a)
   - $P(F \cap S) = 0,08$.
   - $P_{\bar{F}}(S) = 0,4$.
   - $P(S) = 0,32$.
   - $P_S(F) = 0,25$.

   b)
   - Dans ce groupe, il y a 24 % de garçons qui pratiquent du sport en club.
   - Parmi les personnes qui pratiquent un sport en club, 75 % sont des garçons.

Corrigé de l'exercice 3



$p = \dfrac{10}{21}$

Corrigé de l'exercice 4

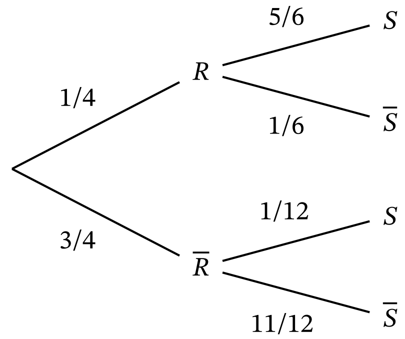
	DP	$\overline{DP}$	Total
G	12	3	15
F	16	1	17
Total	28	4	32

$P_{DP}(F) = \dfrac{4}{7}$

Corrigé de l'exercice 5

1) $0,2 = P(A)$
2) $0,8 = P\left(\overline{A}\right)$
3) $0,35 = P_A(B)$
4) $0,65 = P_A\left(\overline{B}\right)$
5) $0,58 = P_{\overline{A}}(B)$
6) $0,42 = P_{\overline{A}}\left(\overline{B}\right)$

Corrigé de l'exercice 6



Corrigé de l'exercice 7

Il ne s'agit pas d'une probabilité conditionnelle. Le pourcentage s'applique sur l'ensemble des pommes de terre.

$P(A \cap \overline{C}) = 0{,}35$.

Corrigé de l'exercice 8

Les probabilités conditionnelles se lisent sur la deuxième partie de l'arbre :

• $P(R) = 0{,}7$ • $P(\overline{R}) = 0{,}3$ • $P_R(T) = 0{,}17$ • $P_R(\overline{T}) = 0{,}83$ • $P_{\overline{R}}(T) = 0{,}68$ • $P_{\overline{R}}(\overline{T}) = 0{,}32$.

Corrigé de l'exercice 9

$P(\overline{A} \cap \overline{B}) = P(\overline{A}) \times P_{\overline{A}}(\overline{B})$.

$P(\overline{A}) = 1 - 0{,}8 = 0{,}2$.

$P_{\overline{A}}(\overline{B}) = 1 - 0{,}6 = 0{,}4$.

Ainsi, $P(\overline{A} \cap \overline{B}) = P(\overline{A}) \times P_{\overline{A}}(\overline{B}) = 0{,}2 \times 0{,}4 = 0{,}08$.

Corrigé de l'exercice 10

$p(\mathrm{G}) = 0,6$ et $p_{\mathrm{G}}(\mathrm{A}) = 0,8$ et on cherche $p(\mathrm{G} \cap \mathrm{A})$:

$p(\mathrm{G} \cap \mathrm{A}) = p(\mathrm{G}) \times p_{\mathrm{G}}(\mathrm{A}) = 0,6 \times 0,8 = 0,48$.

Corrigé de l'exercice 11

La probabilité est donnée par :

$P_{\overline{V}}(\overline{F}) = \dfrac{\text{Nombre de garçons de moins de 20 ans}}{\text{Nombre de personnes de moins de 20 ans}} = \dfrac{59}{115}$

Corrigé de l'exercice 12

1\. 1. $p_{\mathrm{E}}(\mathrm{V}) = \frac{7}{20}$; $p_{\mathrm{V}}(\mathrm{E}) = \frac{7}{18}$ et $p_{\overline{\mathrm{E}}}(\mathrm{V}) = \frac{11}{19}$.

2\. On cherche $p_{\mathrm{E}}(\overline{\mathrm{V}}) = \frac{13}{20}$.

Corrigé de l'exercice 13

$\mathrm{P(A)} = \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{5}$ par la formule des probabilités totales ($\{\mathrm{B}, \overline{\mathrm{B}}\}$ partition de Ω).

Corrigé de l'exercice 14

D'après la formule des probabilités totales,

$$\begin{aligned}
P(\overline{B}) &= P(A \cap \overline{B}) + P(\overline{A} \cap \overline{B}) \\
&= P(A) \times P_A(\overline{B}) + P(\overline{A}) \times P_{\overline{A}}(\overline{B}) \\
&= 0{,}2 \times 0{,}9 + 0{,}8 \times 0{,}1 \\
&= 0{,}26
\end{aligned}$$

Corrigé de l'exercice 15

Comme A et $\bar{A}$ forment une partition de l'univers, d'après la loi des probabilités totales :

$P(C) = P(A \cap C) + P(\bar{A} \cap C)$.

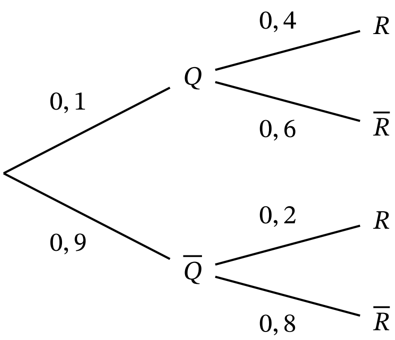
Or $P(\bar{A} \cap C) = P(\bar{A}) \times P_{\bar{A}}(C) = 0{,}7x$.

Donc $0{,}7x = P(C) - P(A \cap C) = 0{,}57 - 0{,}3 \times 0{,}5 = 0{,}57 - 0{,}15 =$

0,42.
Donc $x = \dfrac{0{,}42}{0{,}7} = 0{,}6$

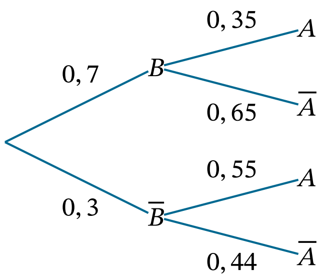
Corrigé de l'exercice 16

1) $P(Q) = 0,1$, $P(R) = 0,22$, $P(R \cap Q) = 0,04$.
2) $P_Q(R) = 0,1$ et $P_R(Q) = \dfrac{2}{11}$
3) Arbre pondéré :



Corrigé de l'exercice 17

1) Arbre pondéré :



2) $P(A) = 0,41$.

Corrigé de l'exercice 18

D'après l'énoncé, $p(\mathrm{D}) = 0,53$, $p(\overline{\mathrm{D}}) = 0,47$

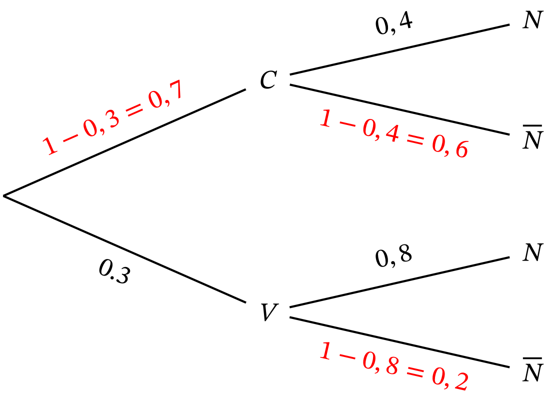
$$p_{\mathrm{D}}(\mathrm{M}) = 0,515 \text{ et } p_{\overline{\mathrm{D}}}(\mathrm{M}) = 0,435.$$

Les autres probabilités se déduisent par différence avec 1 .
Par la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned} p(\mathrm{M}) &= p(\mathrm{D}) \times p_{\mathrm{D}}(\mathrm{M}) + p(\overline{\mathrm{D}}) \times p_{\overline{\mathrm{D}}}(\mathrm{M}) \\ &= 0,53 \times 0,515 + \times 0,47 \times 0,435 = 0,4774. \end{aligned}$$

Corrigé de l'exercice 19

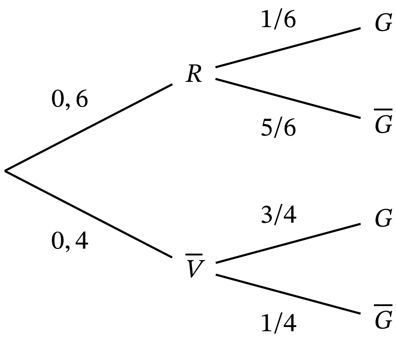
1) L'arbre de probabilité correspond à la situation est :



2) Déterminons $P(C \cap N)$. En utilisant les formule des probabilités conditionnelles,
$P(C \cap N) = P_C(N) \times P(C) = 0,7 \times 0,4 = 0,28$.
3) En utilisant la formule des probabilités totales,
$P(N) = P(C \cap N) + P(V \cap N) = P(C) \times P_C(N) + P(V) \times P_V(N) = 0,7 \times 0,4 + 0,3 \times 0,8 = 0,28 + 0,24 = 0,52$.
4) On veut calculer $P_{\overline{N}}(V)$. En utilisant la formule de Bayes,
$P_{\overline{N}}(V) = \dfrac{P\left(\overline{N} \cap V\right)}{P\left(\overline{N}\right)} = \dfrac{0,3 \times 0,2}{1 - 0,52} = 0,125$

Corrigé de l'exercice 20

1) Arbre :



2) $P(V \cap G) = 0,3$.
3) $P(G) = 0,4$.
4) $P_G(R) = \dfrac{1}{4}$
5) $\dfrac{4}{10} \times \dfrac{3}{9} = \dfrac{2}{15}$.
OU : Il y a 6 tirages possibles avec les deux jetons gagnants et 45 tirages différents, donc $p = \dfrac{6}{45}$.

Corrigé de l'exercice 21

$p(A) \times p(B) = 0,3 \times 0,6 = 0,18 \neq p(A \cap B)$, donc A et B ne sont pas indépendants.

Corrigé de l'exercice 22

1) On sait que $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$, soit $\frac{4}{7} = \dfrac{3}{7} + frac320 - P(A \cap B)$, d'où :

$$P(A \cap B) = \frac{3}{7} + \frac{3}{20} - \frac{4}{7} = \frac{3}{20} - \frac{1}{7} = \frac{21}{140} - \frac{20}{140} = \frac{1}{140}.$$

2) On a $P(A) \times P(B) = \frac{9}{140}$ et $P(A \cap B) = \frac{1}{140}$: les évènements A et B ne sont pas indépendants.

3) $P_A(B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)} = \dfrac{\frac{1}{140}}{\frac{3}{7}} = \dfrac{1}{140} \times \dfrac{7}{3} = \dfrac{1}{60}$.

$P_B(A) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)} = \dfrac{\frac{1}{140}}{\frac{3}{20}} = \dfrac{1}{140} \times \dfrac{20}{3} = \dfrac{1}{210}$.

Corrigé de l'exercice 23

Calculez $P(C)$, puis calculez $P(F \cap C)$ et montrez que $P(F) \times P(C) = P(F \cap C)$.

Corrigé de l'exercice 24

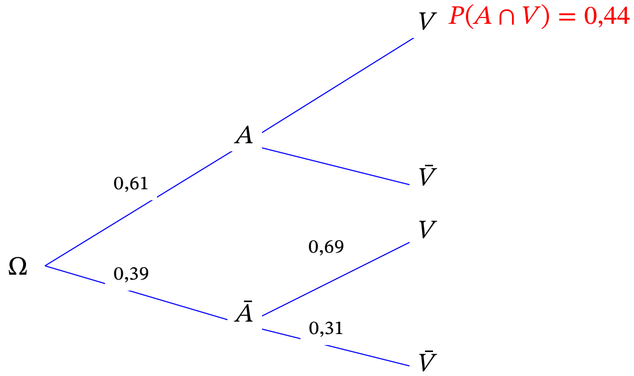
1. De l'énoncé, on déduit que :

$P(A) = 0{,}61$

$P_{\bar{A}}(V) = 0{,}69$

$P(A \cap V) = 0{,}44$

On peut alors construire cet arbre de probabilités :



On a donc $P_A(V) = \dfrac{P(A \cap V)}{P(A)} = \dfrac{0{,}44}{0{,}61} = \dfrac{44}{61}$.

2. Comme A et $\bar{A}$ forment une partition de l'univers, on peut appliquer la loi des probabilités totales :

$P(V) = P(A \cap V) + P(\bar{A} \cap V)$.

Or $P(\bar{A} \cap V) = P(\bar{A}) \times P_{\bar{A}}(V) = (1 - 0{,}61) \times 0{,}69 = 0{,}269$.

Donc $P(V) = 0{,}44 + 0{,}269 = 0{,}709$.

3. On a $P_{\bar{V}}(A) = \dfrac{P(\bar{V} \cap A)}{P(\bar{V})} = \dfrac{P(A \cap \bar{V})}{P(\bar{V})} = \dfrac{P(A) \times P_A(\bar{V})}{P(\bar{V})}$.

Or, d'après la question précédente : $P(\bar{V}) = 1 - P(V) = 1 - 0{,}709 = 0{,}291$

et d'après la question 1 : $P_A(\bar{V}) = 1 - P_A(V) = 1 - \dfrac{44}{61} = \dfrac{17}{61}$.

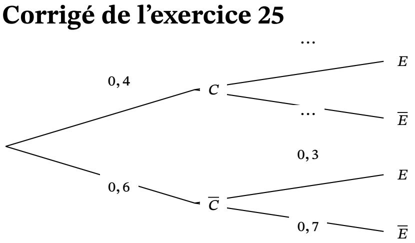
Donc $P_{\bar{V}}(A) = \dfrac{0{,}61 \times \dfrac{17}{61}}{0{,}291} \approx 0{,}584$.

4. On a vu que $P(\bar{V}) = 1 - 0{,}291 = 0{,}709$.

Comme les deux événements sont indépendants, en les appelant $\bar{V}_1$ et $\bar{V}_2$, on a : $P(\bar{V}_1 \cap \bar{V}_2) = P(\bar{V}_1) \times P(\bar{V}_2)$

La probabilité cherchée est donc égale à $P(\bar{V}_1 \cap \bar{V}_2) = 0{,}709 \times 0{,}709 \approx 0{,}503$.

Corrigé de l'exercice 25



- On a $P(C) = 0,40$;

- L'énoncé donne $P(C \cap E) = 0,24$;

- L'énoncé donne également $P_{\bar{C}}(E) = 0,30$.

2. On a $P(\bar{C} \cap \bar{E}) = P(\bar{C}) \times P_{\bar{C}}(\bar{E}) = 0,6 \times 0,7 = 0,42$.

3. On a $P(C) \times P_C(E) = 0,4 \times P_C(E) = 0,24$.

On en déduit que $P_C(E) = \frac{0{,}24}{0{,}4} = \frac{6}{10} = 0,6$.

D'après la loi des probabilités totales :

$P(E) = P(E \cap C) + P(E \cap \bar{C}) = 0,4 \times 0,6 + 0,6 \times 0,3 = 0,24 + 0,18 = 0,42$.

4.

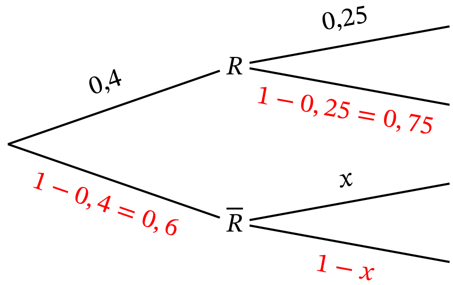
On a $P(C \cap E) = 0,4 \times 0,6 = 0,24$ et

$P(C) \times P(E) = 0,4 \times 0,42 = 0,168$.

Comme $P(C \cap E) \neq P(C) \times P(E)$, on en déduit que les évènements C et E ne sont pas indépendants.

Corrigé de l'exercice 26

1) On représente cette situation à l'aide d'un arbre pondéré :



2) On sait que 20 % des bouteilles de jus de fruits vendues possèdent l'appellation « pur jus » donc $P(J) = 0,2$.

D'après la formule des probabilités totales :

$P(J) = P(R \cap J) + P\left(\bar{R} \cap J\right) = P(R) \times P_R(J) + P\left(\bar{R}\right) \times P_{\bar{R}}(J) = 0,4 \times 0,25 + 0,6 \times x = 0,1 + 0,6x$

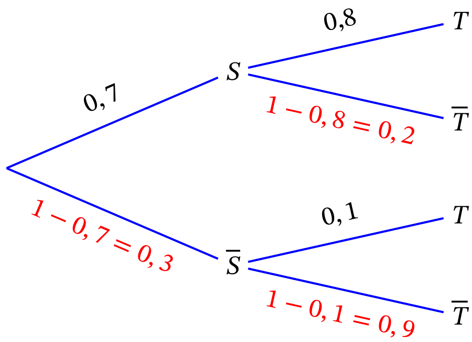
$\left.\begin{array}{rcl} P(J) & = & 0,2 \\ P(J) & = & 0,1 + 0,6x \end{array}\right\} \Longrightarrow 0,2 = 0,1 + 0,6x \iff x = \dfrac{1}{6}$

3) Une bouteille passée en caisse et prélevée au hasard est une bouteille de « pur jus ».

C'est une bouteille de jus d'orange avec la probabilité $P_J(R) = \dfrac{P(R \cap J)}{P(J)} = \dfrac{0,1}{0,2} = \dfrac{1}{2}$

Corrigé de l'exercice 27

1) On construit un arbre pondéré décrivant la situation :



2) L'évènement « l'élève interrogé est sensible au développement durable et pratique le tri sélectif » est l'évènement $S \cap T$.

$P(S \cap T) = P(S) \times P_S(T) = 0,7 \times 0,8 = 0,56$

3) D'après la formule des probabilités totales :

$P(T) = P(S \cap T) + P(\bar{S} \cap T) = P(S) \times P_S(T) + P(\bar{S}) \times P_{\bar{S}}(T) = 0,56 + 0,3 \times 0,1 = 0,59$

4) On interroge un élève qui ne pratique pas le tri sélectif.

On évalue si cet élève est sensible au développement durable, donc on cherche $P_{\overline{T}}(S)$:

$P_{\overline{T}}(S) = \dfrac{P(S \cap \overline{T})}{P(\overline{T})} = \dfrac{P(S \cap \overline{T})}{1 - P(T)} = \dfrac{0,7 \times 0,2}{1 - 0,59} \approx 0,34$

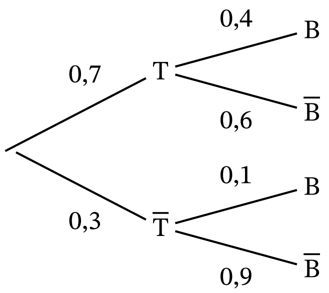
Les chances qu'il se dise sensible au développement durable sont de 34 % donc ne sont pas inférieures à 10 %.

Corrigé de l'exercice 28

1) a) $p\,(\mathrm{T}) = 0,7$.

b) $p_{\mathrm{T}}\,(\mathrm{B}) = 0,4$ et $p_{\overline{\mathrm{T}}}\,(\mathrm{B}) = 0,10$.

2)



3) a) $p(\mathrm{T} \cap \mathrm{B}) = p(\mathrm{T}) \times p_{\mathrm{T}}(\mathrm{B}) = 0,7 \times 0,4 = 0,28$.

b) On a $p(\mathrm{B}) = p(\mathrm{T} \cap \mathrm{B}) + p(\overline{\mathrm{T}} \cap \mathrm{B})$.

$p(\overline{\mathrm{T}} \cap \mathrm{B}) = p\left(\overline{\mathrm{T}}\right) \times p_{\mathrm{B}} = 0,3 \times 0,1 = 0,03$. Donc $p(\mathrm{B}) = 0,28 + 0,03 = 0,31$.

4) Il faut calculer $p_{\mathrm{B}}(\mathrm{T}) = \dfrac{p(\mathrm{B} \cap \mathrm{T})}{p(\mathrm{B})} = \dfrac{0,28}{0,31} = \dfrac{28}{31} \approx 0,903 \approx 0,90$.

5) $p(\mathrm{T} \cap \mathrm{B}) = 0,28$ et $p(\mathrm{B}) \times p(\mathrm{T}) = 0,31 \times 0,7 = 0,217 \neq 0,28$: les évènements ne sont pas indépendants.

6) $p(\mathrm{T} \cup \mathrm{B}) = p(\mathrm{T}) + p(\mathrm{B}) - p(\mathrm{T} \cap \mathrm{B}) = 0,7 + 0,31 - 0,28 = 0,73$: c'est la probabilité qu'un ménage pratique le tri sélectif **ou** consomme des produits bio.

7) a) S peut prendre les valeurs 0, 10, ,20, 30.

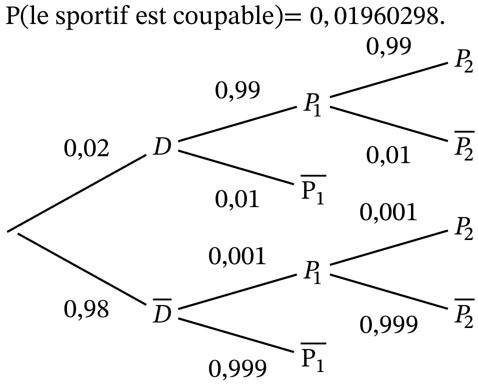
b) Tableau compléter :

S	0	10	20	30
$p(S)$	0,27	0,03	0,42	0,28

Corrigé de l'exercice 29

1) $P(P) = 0,0296$

2) a) Utilisez la formule des probabilités totales. On trouve bien P(le sportif est coupable)$= 0,01960298$.



b) $P_{\overline{D}}(P_1 \cap P_2) = 10^{-6}$.

Une chance sur un million. Impossible ?