Parcours d'exercices

Produit scalaire

7

GÉOMÉTRIE

Ce parcours d'exercices appartient à : ....

Parcours 1

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22

45 44 43 42 41 40 39 38 37 36 35 34 33 32 31 30 29 28 27 26 25 24 23

46 47 48 49 50 51 52 53 54

Parcours 2

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22

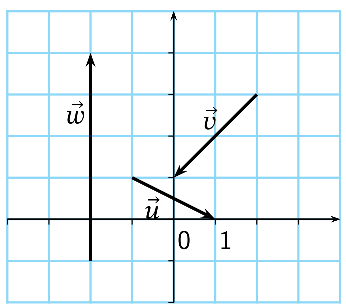
45 44 43 42 41 40 39 38 37 36 35 34 33 32 31 30 29 28 27 26 25 24 23

46 47 48 49 50 51 52 53 54

1 Rappels sur les vecteurs

Exercice 1

Lire graphiquement les coordonnées des vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ dans le repère ci-dessous.



Exercice 2

Dans un repère, on considère les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix} 5 \\ -0,5 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} -10,5 \\ 3 \end{pmatrix}$ et les points $A(-1\ ;\ 2)$, $B(6\ ;\ 0)$ et $C(5\ ;\ -3)$.

1) Déterminer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $-3\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AB}-2\vec{u}$

2) Démontrer que $\vec{v}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires.

Exercice 3

À l'aide de la relation de Chasles, simplifier les expressions suivantes :

1) $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BC}$ 2) $\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{BD}-\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB}$

Exercice 4

Les vecteurs suivants sont-ils colinéaires ?

1) $\vec{u}\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} -6 \\ 2 \end{pmatrix}$

2) $\vec{u}\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

3) $\vec{u}\begin{pmatrix} -14 \\ 28 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} -8 \\ 12 \end{pmatrix}$

Exercice 5

Déterminer si les droites (AB) et (CD) sont parallèles.

1) $A(3\ ;\ -2)$, $B(-1\ ;\ -1)$, $C(-3\ ;\ 2)$ et $D(1\ ;\ 3)$

2) $A(-9\ ;\ -2)$, $B(1\ ;\ 3)$, $C(3\ ;\ -2)$ et $D(1\ ;\ -3)$

Exercice 6

Dans chacun des cas suivants, déterminer si les points A, B et C sont alignés.

1) $A(-9\ ;\ 4)$, $B(1\ ;\ -1)$ et $C(4\ ;\ -2)$

2) $A(-4\ ;\ 0)$, $B(-2\ ;\ 1)$ et $C\left(3\ ;\ \frac{7}{2}\right)$

3) $A(-4\ ;\ 4)$, $B(-4\ ;\ 6)$ et $C(-3\ ;\ 2)$

Exercice 7

On considère deux points A et B dans le plan et le point R tel que :

$$2\overrightarrow{AR} = 2\overrightarrow{RB} + \overrightarrow{AB}.$$

1) Exprimer le vecteur $\overrightarrow{AR}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$.
2) Que peut-on en déduire concernant les points A, B et R ?

Exercice 8

On considère un triangle quelconque ABC.

1) Faire une figure.
2) On considère le point M tel que :

$$\overrightarrow{AM} - \overrightarrow{BM} + 2\overrightarrow{MC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}.$$

   a) En utilisant la relation de Chasles, exprimer le vecteur $\overrightarrow{AM}$ à l'aide de vecteurs formés des points A, B et C uniquement.
   b) Que peut-on dire des points A, C et M ?
   c) Placer le point M sur la figure.

Exercice 9

On considère un triangle EFG.

1) Faire une figure et y placer le point H tel que :

$$\overrightarrow{EH} = \frac{2}{3}\overrightarrow{EG} + \frac{1}{3}\overrightarrow{EF}.$$

2) En écrivant que $\overrightarrow{FH} = \overrightarrow{FE} + \overrightarrow{EH}$, démontrer que $\overrightarrow{FH}$ et $\overrightarrow{FG}$ sont colinéaires.
3) Que peut-on en déduire concernant le point H ?

Exercice 10

$ABCD$ est un parallélogramme, F est le point tel que $\overrightarrow{AF} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AB}$ et E le point tel que $\overrightarrow{DE} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{DA}$.

1) Montrer que $\overrightarrow{EF} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AB} - \frac{3}{2}\overrightarrow{AD}$.
2) Décomposer le vecteur $\overrightarrow{BD}$ selon $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$.
3) Démontrer que (EF) et (BD) sont parallèles.

Exercice 11

On considère un triangle ABC et les points D et E tels que $\overrightarrow{AD} = 4\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BE} = \frac{1}{5}\overrightarrow{BC}$.

En utilisant une décomposition adaptée, montrer que les points A, E et D sont alignés.

Exercice 12

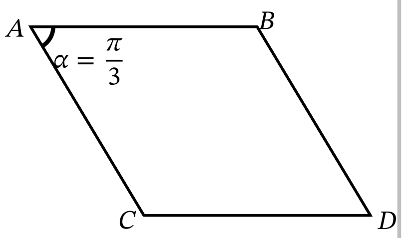
On considère trois points F, G et H du plan et les points I et J tels que $\overrightarrow{FI} = \overrightarrow{FG} + 3\overrightarrow{FH}$ et $\overrightarrow{HJ} = \frac{1}{3}\overrightarrow{FG}$.

En utilisant une décomposition adaptée, montrer que les points F, J et I sont alignés.

2 Définition et propriétés

Exercice 13

Soit $ABDC$ un parallélogramme tel que $AB = 8$ et $AC = 10$ et $\widehat{BAC} = \frac{\pi}{3}$.



Calculer :

1) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.
2) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD}$.
3) $\overrightarrow{DB} \cdot \overrightarrow{CD}$.

Exercice 14

On considère trois points A, B et C du plan tels que $AB = 3$ cm, $AC = 5$ cm et $BC = 6$ cm.

1) Faire une figure.
2) Exprimer $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC}$ en fonction de AB, BC et AC.
3) En déduire $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC}$.

Sésamath

Exercice 15

On considère trois points E, F et G du plan tels que $EF = 8$, $EG = 6$ et $FG = 11$. Calculer :

1) $\overrightarrow{EF} \cdot \overrightarrow{FG}$ 2) $\overrightarrow{FG} \cdot \overrightarrow{GE}$ 3) $\overrightarrow{GF} \cdot \overrightarrow{FE}$

Sésamath

Exercice 16

On considère les vecteurs $\vec{a}\begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix}$ et $\vec{b}\begin{pmatrix} -3 \\ 5 \end{pmatrix}$.

1) Calculer $\|\vec{a}\|$, $\|\vec{b}\|$ et $\|\vec{a}+\vec{b}\|$.
2) En déduire $\vec{a} \cdot \vec{b}$.

Sésamath

Exercice 17

Calculer les produits scalaires suivants :

1) $\vec{u} \cdot \vec{v}$ avec $\vec{u}\begin{pmatrix} 15 \\ -8 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} 6 \\ 9 \end{pmatrix}$
2) $\vec{s} \cdot \vec{t}$ avec $\vec{s}\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix}$ et $\vec{t}\begin{pmatrix} -3 \\ -4 \end{pmatrix}$
3) $\vec{a} \cdot \vec{b}$ avec $\vec{a}\begin{pmatrix} \sqrt{3}-2 \\ 6 \end{pmatrix}$ et $\vec{b}\begin{pmatrix} \sqrt{3}+2 \\ 1 \end{pmatrix}$
4) $\vec{r} \cdot \overrightarrow{AB}$ avec $\vec{r}\begin{pmatrix} 3 \\ 7 \end{pmatrix}$, $A(-1\ ;\ 2)$ et $B(-3\ ;\ 6)$
5) $\overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{MR}$ avec $C(5\ ;\ 6)$, $D(-1\ ;\ 4)$, $M(3\ ;\ 7)$ et $R(8\ ;\ 9)$
6) $\overrightarrow{ST} \cdot \overrightarrow{EF}$ avec $E(0\ ;\ 1)$, $F(3\ ;\ 0)$, $S(8\ ;\ 8)$ et $T(5\ ;\ 5)$

Sésamath

Exercice 18

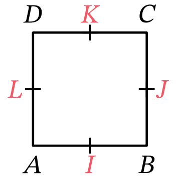
On considère les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix} -1 \\ 5 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$.

Calculer :

1) $\vec{u} \cdot \vec{v}$ 2) $(2\vec{u}) \cdot \vec{v}$ 3) $(-\vec{u}) \cdot (3\vec{v})$

Sésamath

Exercice 19



On considère le carré $ABCD$ ci-dessous de côté 1 et I, J, K et L les milieux des côtés.

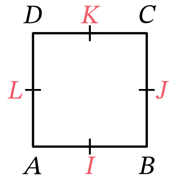
Associer chacun des produits scalaires avec le calcul ou le résultat auquel il est égal.

- $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BL}$
- $\overrightarrow{IB} \cdot \overrightarrow{ID}$
- $\overrightarrow{KJ} \cdot \overrightarrow{KL}$
- $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{LK}$

- $-IB \times IA$
- $AB \times AI$
- $BC \times BJ$
- 0

Sésamath

Exercice 20

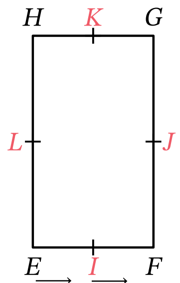


On considère le carré $ABCD$ ci-dessous de côté 1 et I, J, K et L les milieux des côtés.

1) Justifier que $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})$ est un repère orthonormé et donner les coordonnées des points de la figure dans ce repère.
2) En déduire :
 a) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AJ}$
 b) $\overrightarrow{AJ} \cdot \overrightarrow{JD}$
 c) $\overrightarrow{KJ} \cdot \overrightarrow{DL}$
 d) $\overrightarrow{DK} \cdot \overrightarrow{JA}$

Sésamath

Exercice 21



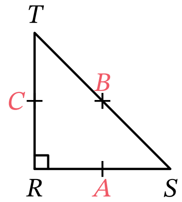
On considère le rectangle $EFGH$ ci-dessous, tel que $EF = 4$ et $EH = 7$, et les points I, J, K et L, milieux respectifs des côtés $[EF]$, $[FG]$, $[GH]$ et $[EH]$. En choisissant un repère orthonormé adapté, calculer :

1) $\overrightarrow{EG} \cdot \overrightarrow{FH}$
2) $\overrightarrow{JL} \cdot \overrightarrow{EG}$
3) $\overrightarrow{EF} \cdot \overrightarrow{GH}$
4) $\overrightarrow{HF} \cdot \overrightarrow{EK}$
5) $\overrightarrow{IL} \cdot \overrightarrow{IG}$
6) $\overrightarrow{HJ} \cdot \overrightarrow{JK}$

Sésamath

Exercice 22

On considère le triangle isocèle et rectangle RST ci-dessous, tel que $RS = RT = 4$, et les points A, B et C, milieux respectifs des côtés $[RS]$, $[ST]$ et $[RT]$.



En choisissant un repère orthonormé adapté, calculer :

1) $\overrightarrow{RT} \cdot \overrightarrow{AC}$
2) $\overrightarrow{ST} \cdot \overrightarrow{RS}$
3) $\overrightarrow{CS} \cdot \overrightarrow{SA}$
4) $\overrightarrow{SB} \cdot \overrightarrow{CB}$

Sésamath

Exercice 23

Calculer $\vec{u} \cdot \vec{v}$ avec :

1) $\|\vec{u}\| = 5$, $\|\vec{v}\| = 6$ et $\|\vec{u} + \vec{v}\| = 10$
2) $\|\vec{u}\| = 3\sqrt{5}$ et $\vec{v} = \vec{u}$
3) $\vec{u}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} 6 \\ 12 \end{pmatrix}$
4) $\|\vec{u}\| = 8$ et $\vec{v} = -2\vec{u}$

Sésamath

Exercice 24

On considère les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix} 6 \\ 7 \end{pmatrix}$, $\vec{v}\begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\vec{w}\begin{pmatrix} -\sqrt{3} \\ y \end{pmatrix}$ avec x et y réels.

1) Déterminer x tel que $\vec{u} \cdot \vec{v} = 11$.
2) Déterminer y tel que $\vec{u} \cdot \vec{w} = \sqrt{12}$.

Sésamath

Exercice 25

On considère les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ 2x \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x \\ 3 \end{pmatrix}$ avec x réel.

Déterminer, si elle(s) existe(nt), pour quelle(s) valeur(s) de x, on a :

1) $\vec{u} \cdot \vec{v} = -9$
2) $\vec{u} \cdot \vec{v} = -10$
3) $\vec{u} \cdot \vec{v} = 2$
4) $\vec{u} \cdot \vec{v} > 7$

Sésamath

Exercice 26

D'après le cours, si $\vec{u} = \vec{0}$ ou $\vec{v} = \vec{0}$, alors $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.
La réciproque de cette propriété est-elle vraie ? Justifier.

Sésamath

3 Propriétés algébriques

Exercice 27

On considère trois points A, B et C du plan tels que $AB = 2$, $AC = 6$ et $BC = 7$.

1) a) Justifier que $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = -\left(\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{AC}\right)$.

b) En déduire $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.

2) En utilisant la méthode précédente, calculer :

a) $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}$ b) $\overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{CA}$

Sésamath

Exercice 28

Développer puis exprimer les produits scalaires suivants en fonction de $\vec{u} \cdot \vec{v}$, $\left\|\vec{u}\right\|$ et $\left\|\vec{v}\right\|$.

1) $(3\vec{u} + 2\vec{v}) \cdot (5\vec{u} + 4\vec{v})$

2) $(5\vec{u} - 4\vec{v}) \cdot (\vec{u} + \vec{v})$

3) $(-3\vec{u} + 6\vec{v}) \cdot (-\vec{u} - 5\vec{v})$

4) $(-\vec{u} - 5\vec{v}) \cdot (3\vec{u} - 6\vec{v})$

Sésamath

Exercice 29

On sait que cinq points du plan A, B, C, D et E vérifient :

- $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AE} = 2$
- $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{ED} = -4$
- $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 5$

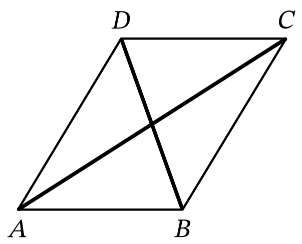
Déterminer $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD}$.

Sésamath

Exercice 30 : Identité de polarisation

L'égalité $\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{4}\left(\left\|\vec{u} + \vec{v}\right\|^2 - \left\|\vec{u} - \vec{v}\right\|^2\right)$ est appelée identité de polarisation.

On considère un parallélogramme $ABCD$ dont les diagonales ont pour longueur $AC = 7$ et $BD = 4$.



1) En utilisant l'identité de polarisation, justifier que :

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = \frac{1}{4}\left(AC^2 - \left\|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CB}\right\|^2\right).$$

2) En déduire $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC}$.

Sésamath

4 Orthogonalité

Exercice 31

On considère les points $A(1\,;\,3)$, $B(3\,;\,1)$, $C(-2\,;\,-2)$, $D(13\,;\,-5)$ et $E(4\,;\,3)$.

1) Les droites (AC) et (AB) sont-elles perpendiculaires ?

2) Même question pour : (AC) et (BD).

Sésamath

Exercice 32

On considère quatre points $J(6\,;\,1)$, $K(2\,;\,4)$, $L(1\,;\,-5)$ et $M\left(-\frac{5}{2}\,;\,-2\right)$.

1) Le triangle JKL est-il rectangle en J ?

2) Le triangle JKM est-il rectangle ?

Sésamath

Exercice 33

On considère trois points $A(\sqrt{6}\,;\,\sqrt{7})$, $B(\sqrt{2}\,;\,\sqrt{3})$ et $C(-\sqrt{6}\,;\,\sqrt{7} + 2\sqrt{3})$.

Montrer que ABC est rectangle en B.

Sésamath

Exercice 34

On considère quatre points $Q(2\,;\,-2)$, $R(1\,;\,1)$, $S(4\,;\,2)$ et $T(5\,;\,-1)$.

Déterminer la nature du quadrilatère $QRST$.

Sésamath

Exercice 35

On considère trois points $A(5,2\,;\,4)$, $B(6\,;\,3,1)$ et $C(1\,;\,y)$.

Déterminer y tel que ABC soit rectangle en A.

Sésamath

Exercice 36

Associer chacune des égalités vectorielles suivantes :

- $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AM} = 0$
- $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$
- $\overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{AB}$ où k décrit $\mathbb{R}_+$
- $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CM} = 0$

à l'ensemble des points M qui lui correspond :

- la demi-droite $[AB)$
- la hauteur issue de C dans ABC
- le cercle de diamètre $[AB]$
- la perpendiculaire à $[BC]$ passant par A

Sésamath

Exercice 37

Déterminer, si possible, la ou les valeurs de m pour lesquelles les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux.

1) $\vec{u}\begin{pmatrix} m \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} -4 \\ m \end{pmatrix}$

2) $\vec{u}\begin{pmatrix} m \\ 4 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} 2m \\ 6 \end{pmatrix}$

3) $\vec{u}\begin{pmatrix} m^2 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} 3 \\ m-4 \end{pmatrix}$

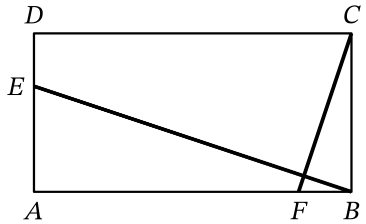
4) $\vec{u}\begin{pmatrix} m \\ m^2 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} -1 \\ m \end{pmatrix}$

5) $\vec{u}\begin{pmatrix} \frac{1}{m} \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} 4 \\ m \end{pmatrix}$

Sésamath

Exercice 38

On considère le rectangle $ABCD$ ci-dessous tel que $AB = 6$ et $AD = 3$, $E \in [AD]$ avec $AE = 2$ et $F \in [AB]$ avec $AF = 5$.



Montrer que les droites (FC) et (BE) sont perpendiculaires.

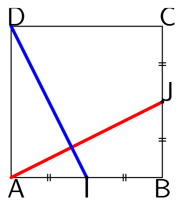
Sésamath

Exercice 39

Soit $ABCD$ un carré de côté 2.

Les points I est J sont les milieux respectifs des segments $[AB]$ et $[BC]$.

Montrer ques les droites (AJ) et (ID) sont perpendiculaires.



Sésamath

5 Produit scalaire et angles

Exercice 40

On considère un triangle ABC avec $AB = 5$ et $BC = 6$ et $\widehat{ABC} = 60°$.

1) Faire une figure.
2) Calculer $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}$.
3) Calculer $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB}$.
   On remarquera d'abord que $\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BA}$.

Sésamath

Exercice 41

On considère trois points $R(-1\ ;\ -2)$, $S(5\ ;\ -4)$ et $T(3\ ;\ 6)$.

1) a) Calculer $\overrightarrow{RS} \cdot \overrightarrow{RT}$, RS et RT.
   b) En déduire $\cos\left(\widehat{SRT}\right)$ puis une mesure de $\widehat{SRT}$, arrondie à $0,01$ degré près.
2) Déterminer de même une mesure de $\widehat{RST}$.
3) En déduire $\widehat{STR}$.

Sésamath

Exercice 42

On considère un triangle OMN tel que $OM = 5$, $ON = 8$ et $\widehat{MON} = \dfrac{\pi}{4}$ radians.

Déterminer MN (on pourra d'abord calculer $\overrightarrow{MN}^2$ en utilisant la relation de Chasles).

Sésamath

Exercice 43

On considère trois points I, J et K du plan tels que $IJ = 4$, $IK = 5$ et $JK = 8$.

1) Faire une figure.
2) Montrer que $\vec{IJ} \cdot \overrightarrow{IK} = -\overrightarrow{KI} \cdot \vec{IJ}$.
3) En déduire $\vec{IJ} \cdot \overrightarrow{IK}$.
4) En déduire une mesure de l'angle $\widehat{JIK}$, arrondi à $0,1$ près.

Sésamath

Exercice 44

On considère trois points A, B et C du plan tels que $AB = 7$, $BC = 8$ et $AC = 12$.

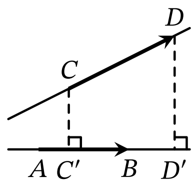
1) a) Calculer $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.
   b) En déduire une mesure de $\widehat{A}$, arrondi à $0,1$ près.
2) Déterminer $\widehat{B}$ puis $\widehat{C}$.

Sésamath

6 Produit scalaire et projection

Exercice 45

Soit C et D deux points distincts, extérieurs à une droite (AB) et C' et D' les projetés orthogonaux respectifs de C et D sur (AB).



1) Montrer l'égalité vectorielle :
$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CC'} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{C'D'} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{D'D}.$$
2) En déduire que $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{C'D'}$.

Sésamath

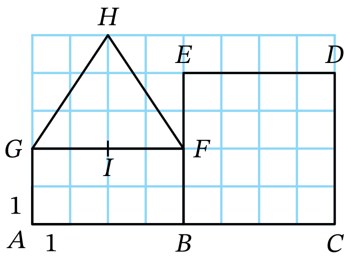
Exercice 46

On considère trois points $A(-1\ ;\ 1)$, $B(2\ ;\ 2)$ et $C(0\ ;\ 7)$ et B', le pied de la hauteur issue de B dans ABC.

1) Exprimer $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB}$ en fonction de CB'.
2) En déduire CB' puis BB'.
3) Calculer l'aire de ABC.

Sésamath

Exercice 47



Sésamath

En utilisant des projections, calculer les produits scalaires suivants :

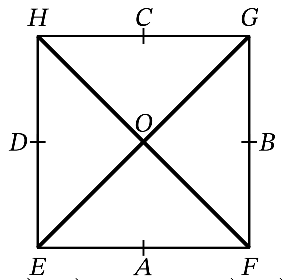
1) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}$
2) $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BI}$
3) $\overrightarrow{BH} \cdot \overrightarrow{CA}$
4) $\overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{FH}$
5) $\overrightarrow{HG} \cdot \overrightarrow{BC}$
6) $\overrightarrow{GI} \cdot \overrightarrow{FD}$

7 Choisir la bonne formule

Exercice 48

On considère le carré $EFGH$ de côté a ci-dessous. Dans ce carré, A est le milieu de $[EF]$, B le milieu de $[FG]$, C le milieu de $[GH]$, D le milieu de $[HE]$ et O est le centre de $EFGH$.

En utilisant la méthode de votre choix, exprimer les produits scalaires suivants en fonction de a :



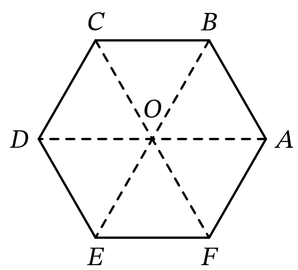
1) $\overrightarrow{HO} \cdot \overrightarrow{HF}$
2) $\overrightarrow{EF} \cdot \overrightarrow{EB}$
3) $\overrightarrow{CH} \cdot \overrightarrow{GE}$
4) $\overrightarrow{EO} \cdot \overrightarrow{FE}$
5) $\overrightarrow{OG} \cdot \overrightarrow{FH}$
6) $\overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{CA}$
7) $\overrightarrow{OE} \cdot \overrightarrow{OB}$
8) $\overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{CO}$
9) $\overrightarrow{EB} \cdot \overrightarrow{EG}$

Sésamath

Exercice 49

On considère l'hexagone régulier $ABCDEF$ de centre O et de côté 1 ci-dessous.

En utilisant la méthode de votre choix, calculer les produits scalaires suivants :



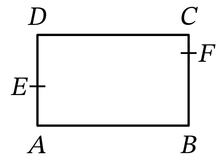
1) $\overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{FO}$
2) $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}$
3) $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OF}$
4) $\overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{FA}$
5) $\overrightarrow{OF} \cdot \overrightarrow{OD}$
6) $\overrightarrow{CE} \cdot \overrightarrow{FB}$
7) $\overrightarrow{EB} \cdot \overrightarrow{DF}$
8) $\overrightarrow{CE} \cdot \overrightarrow{CA}$
9) $\overrightarrow{BE} \cdot \overrightarrow{CO}$

Sésamath

Exercice 50

On considère un rectangle $ABCD$ avec $AB = 5$ et $AD = 3$, E un point quelconque de $[AD]$ et F un point quelconque de $[BC]$.

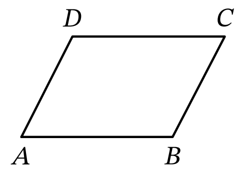
1) Calculer $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{EF}$.
2) Soit G un point de $[CD]$.
   a) Exprimer $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{EG}$ en fonction de DG.
   b) Exprimer $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{GF}$ en fonction de BF.



Sésamath

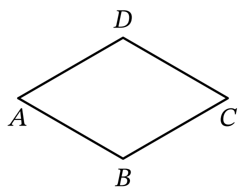
Exercice 51

1) $ABCD$ est un parallélogramme avec $AB = 4$, $AD = 3$ et $AC = 6$.



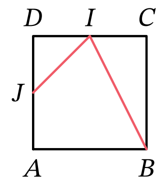
   Calculer $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{DA}$.

2) $ABCD$ est un losange de côté 4 et vérifiant $\widehat{BAD} = 60°$.



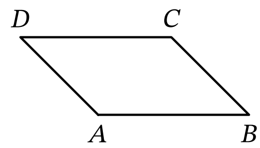
   Calculer $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.

3) $ABCD$ est un carré de côté 1 et I est le milieu de $[DC]$ et J celui de $[AD]$.



   Calculer $\overrightarrow{JI} \cdot \overrightarrow{BI}$.

4) $ABCD$ est un parallélogramme avec $AB = 5$ et $BD = 8$ et $\widehat{ABD} = 20°$.



   Calculer $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BD}$.
   Arrondir à 0,1 près.

Sésamath

8 Problèmes et approfondissement

Exercice 52

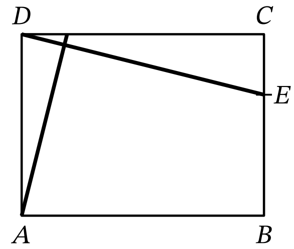
On considère trois points $A(1\ ;\ 0)$, $B(4\ ;\ 1)$ et $C(2\ ;\ 5)$.

1) Faire une figure.
2) Montrer que $\cos\left(\widehat{ABC}\right) = \dfrac{\sqrt{2}}{10}$.
3) En déduire que $\sin\left(\widehat{ABC}\right) = \dfrac{7\sqrt{2}}{10}$.
4) Tracer C' le pied de la hauteur issue de C sur (AB) et montrer que $CC' = \dfrac{7\sqrt{10}}{5}$.
5) En déduire l'aire de ABC.
6) a) Tracer le rectangle de sommets les points de coordonnées $(1\ ;\ 0)$, $(4\ ;\ 0)$, $(4\ ;\ 5)$ et $(1\ ;\ 5)$.
   b) Retrouver la réponse à la question précédente.

Sésamath

Exercice 53

On considère le rectangle $ABCD$ tel que $AB = 4$ et $AD = 3$ ci-dessous avec $E \in [CB]$ tel que $EC = 1$.



On cherche à déterminer où placer le point F de $[CD]$ tel que (DE) et (AF) soient perpendiculaires.
Pour cela, nous allons utiliser deux méthodes, l'une analytique, l'autre géométrique.
Méthode analytique

1) Donner les coordonnées de A, D et E dans le repère $\left(A\ ;\ \frac{1}{4}\overrightarrow{AB}, \frac{1}{3}\overrightarrow{AD}\right)$.
2) a) Soit $F(x\ ;\ y)$.
   Donner une condition sur y pour que F appartiennent bien à (CD).
   b) Justifier que $(DE) \perp (AF) \Leftrightarrow \begin{cases} y = 3 \\ 4x - 3 = 0 \end{cases}$.
   c) En déduire où placer F sur $[CD]$ pour que (DE) et (AF) soient perpendiculaires.

Méthode géométrique

1) Montrer que $\left(\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CE}\right) \cdot \left(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DF}\right) = 4DF - 3$.
2) En déduire que le point F de $[CD]$ tel que (DE) et (AF) soient perpendiculaires vérifie $DF = \dfrac{3}{4}$.

Sésamath

Exercice 54

Soit m un réel strictement positif, d_m la droite d'équation $x + y = m$ et $\mathcal{C}_m$ le cercle de centre $O(0\ ;\ 0)$ et de rayon m.

1) Montrer que d_m et $\mathcal{C}_m$ sont sécants quelle que soit la valeur de m et donner leurs points d'intersection.
2) Soit $A(a\ ;\ 0)$, avec $a \in \mathbb{R}$, et $\mathcal{C}'_m$ le cercle de centre A et de rayon m.
   a) Montrer que d_m et $\mathcal{C}'_m$ ont au moins un point commun si et seulement si $-a^2 + 2ma + m^2 > 0$.
   b) Résoudre cette inéquation d'inconnue a et en déduire où placer A pour que d_m et $\mathcal{C}'_m$ aient au moins un point commun.

Sésamath

(Correction)

Corrigé de l'exercice 1

1) $\vec{u}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$; $\vec{v}\begin{pmatrix} -2 \\ -2 \end{pmatrix}$; $\vec{w}\begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix}$

2) $\vec{u}+\vec{v}+\vec{w}\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$

Corrigé de l'exercice 2

1) $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 7 \\ -2 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} 6 \\ -5 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix} -1 \\ -3 \end{pmatrix}$

2) $-3\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} -21 \\ 6 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AB}-2\vec{u}\begin{pmatrix} -3 \\ -1 \end{pmatrix}$

3) $-\frac{3}{2}\overrightarrow{AB}=\vec{v}$ donc $\overrightarrow{AB}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires

Corrigé de l'exercice 3

1) $\vec{0}$

2) $2\overrightarrow{AD}$

Corrigé de l'exercice 4

1) Oui

2) Oui

3) Non

Corrigé de l'exercice 5

1) (AB) et (CD) ne sont pas parallèles.

2) (AB) et (CD) sont parallèles.

Corrigé de l'exercice 6

1) A, B et C ne sont pas alignés.

2) A, B et C sont alignés.

3) A, B et C ne sont pas alignés.

Corrigé de l'exercice 7

1) $\overrightarrow{AR}=\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}$.

2) Ils sont alignés mais il faut le justifier.

Corrigé de l'exercice 8

1) Faites-là !

2) a) $\overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$
   b) Ils sont alignés mais il faut le justifier.
   c) La figure doit être cohérente avec la réponse précédente.

Corrigé de l'exercice 9

1) Faites-là !

2) On montre que $\overrightarrow{FH}=\frac{2}{3}\overrightarrow{FG}$ ce qui prouve la colinéarité des vecteurs $\overrightarrow{FH}$ et $\overrightarrow{FG}$.

3) Le point H est sur la droite (FG).

Corrigé de l'exercice 10

1) On peut partir de $\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{AF}$.

2) $\overrightarrow{BD}=-\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$.

3) En utilisant les deux égalités vectorielles précédentes, exprimez le vecteur $\overrightarrow{EF}$ en fonction du vecteur $\overrightarrow{BD}$.

Corrigé de l'exercice 11

Il faut montrer que les vecteurs (par exemple) $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AE}$ sont colinéaires.

Corrigé de l'exercice 12

Il faut montrer que les vecteurs (par exemple) $\overrightarrow{FI}$ et $\overrightarrow{FJ}$ sont colinéaires.

Corrigé de l'exercice 13

1) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=40$.

2) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}=64$.

3) $\overrightarrow{DB}\cdot\overrightarrow{CD}=-40$.

Corrigé de l'exercice 14

1) Faites-là.

2) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=\frac{1}{2}(AC^2-AB^2-BC^2)$.

3) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=-10$

Corrigé de l'exercice 15

1) $\overrightarrow{EF}\cdot\overrightarrow{FG}=-74,5$

2) $\overrightarrow{FG}\cdot\overrightarrow{GE}=-46,5$

3) $\overrightarrow{GF}\cdot\overrightarrow{FE}=-74,5$

Corrigé de l'exercice 16

1) $\left\|\vec{a}\right\|=\sqrt{40}$, $\left\|\vec{b}\right\|=\sqrt{34}$ et $\left\|\vec{a}+\vec{b}\right\|=\sqrt{122}$.

2) $\vec{a}\cdot\vec{b}=24$.

Corrigé de l'exercice 17

1) $\vec{u}\cdot\vec{v}=18$

2) $\vec{s}\cdot\vec{t}=11$

3) $\vec{a}\cdot\vec{b}=5$

4) $\vec{r}\cdot\overrightarrow{AB}=22$

5) $\overrightarrow{CD}\cdot\overrightarrow{MR}-34$

6) $\overrightarrow{ST}\cdot\overrightarrow{EF}=-6$

Corrigé de l'exercice 18

1) $\vec{u}\cdot\vec{v}=18$ 2) $(2\vec{u})\cdot\vec{v}=36$ 3) $(-\vec{u})\cdot(3\vec{v})=-54$

Corrigé de l'exercice 19

Corrigé de l'exercice 20

1) Le repère $\left(A\ ;\ \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}\right)$ convient.
   Dans ce repère $A(0\ ;\ 0)$, $B(1\ ;\ 0)$, $C(1\ ;\ 1)$, $D(0\ ;\ 1)$, $I\left(\frac{1}{2}\ ;\ 0\right)$, $J\left(1\ ;\ \frac{1}{2}\right)$, $K\left(\frac{1}{2}\ ;\ 1\right)$ et $L\left(0\ ;\ \frac{1}{2}\right)$.
2) a) 1
   b) $-\frac{3}{4}$
   c) $\frac{1}{4}$
   d) $-\frac{1}{2}$

Corrigé de l'exercice 21

Corrigé de l'exercice 22

Repère $\left(R\ ;\ \frac{1}{4}\overrightarrow{RS}\ ,\ \frac{1}{4}\overrightarrow{RT}\right)$.

1) $\overrightarrow{RT} \cdot \overrightarrow{AC} = 8$
2) $\overrightarrow{ST} \cdot \overrightarrow{RS} = -16$
3) $\overrightarrow{CS} \cdot \overrightarrow{SA} = -8$
4) $\overrightarrow{SB} \cdot \overrightarrow{CB} =$

Corrigé de l'exercice 23

1) $\frac{39}{2}$
2) 45
3) 30
4) -5
5) -128

Corrigé de l'exercice 24

1) $x = -\frac{1}{2}$
2) $y = \frac{8\sqrt{3}}{7}$

Corrigé de l'exercice 25

1) $x = -3$
2) Aucune valeur
3) $x = -3 + \sqrt{11}$ et $x = -3 - \sqrt{11}$
4) $x \in]-\infty\ ;\ -7[\cup]1\ ;\ +\infty[$

Corrigé de l'exercice 26

Non. Trouver un contre exemple.

Corrigé de l'exercice 27

1) a) $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}$.
   b) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = -4,5$.
2) a) $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = 8,5$
   b) $\overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{CA} = 40,5$

Corrigé de l'exercice 28

1) $(3\vec{u} + 2\vec{v}) \cdot (5\vec{u} + 4\vec{v}) = 15\left\|\vec{u}\right\|^2 + 22\vec{u} \cdot \vec{v} + 8\left\|\vec{v}\right\|^2$
2) $(5\vec{u} - 4\vec{v}) \cdot (\vec{u} + \vec{v}) = 5\left\|\vec{u}\right\|^2 - 4\left\|\vec{v}\right\|^2 + \vec{u} \cdot \vec{v}$
3) $(-3\vec{u} + 6\vec{v}) \cdot (-\vec{u} - 5\vec{v}) = 3\left\|\vec{u}\right\|^2 - 30\left\|\vec{v}\right\|^2 + 9\vec{u} \cdot \vec{v}$
4) $(-\vec{u} - 5\vec{v}) \cdot (3\vec{u} - 6\vec{v}) = -3\left\|\vec{u}\right\|^2 + 30\left\|\vec{v}\right\|^2 - 9\vec{u} \cdot \vec{v}$

Corrigé de l'exercice 29

Utilisez la relation de Chasles en écrivant $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{ED}$.
$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = -7$

Corrigé de l'exercice 30

1) On utilise l'identité de polarisation avec $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{BC}$
2) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = 8,25$.

Corrigé de l'exercice 31

1) (AC) et (AB) ne sont pas perpendiculaires.
2) a) (AC) et (BD) sont perpendiculaires.
   b) (BE) et (CD) ne sont pas perpendiculaires.

Corrigé de l'exercice 32

1) Non
2) Oui

Corrigé de l'exercice 33

Calculez $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}$

Corrigé de l'exercice 34

C'est un carré. Il faut le démontrer.

Corrigé de l'exercice 35

$y = \frac{4}{15}$

Corrigé de l'exercice 36

Corrigé de l'exercice 37

1) $m = 0$
2) Aucune valeur
3) $\frac{4}{3}$ et -2
4) $0, 1$ et -1
5) Aucune valeur

Corrigé de l'exercice 38

On peut utiliser un repère orthonormé et montrer que $\overrightarrow{FC} \cdot \overrightarrow{BE} = 0$.
On peut aussi montrer que $\overrightarrow{EB} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{FC} = \frac{1}{6}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$.
$\overrightarrow{FC} \cdot \overrightarrow{BE} = \left(-\frac{2}{3}\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB}\right) \cdot \left(\frac{1}{6}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}\right) = \ldots = 0$.

Corrigé de l'exercice 39

On procède comme dans l'exercice précédent.

Corrigé de l'exercice 40

1) Faites-là.
2) $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = 15$.
3) $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = 21$.

Corrigé de l'exercice 41

1) a) $\overrightarrow{RS} \cdot \overrightarrow{RT} = 8$, $\left\|\overrightarrow{RS}\right\| = 2\sqrt{10}$ $\left\|\overrightarrow{RT}\right\| = 4\sqrt{5}$
   b) $\cos\left(\widehat{SRT}\right) = \frac{1}{5\sqrt{2}}$
      donc $\widehat{SRT} \approx 81,87°$.
2) $\widehat{RST} \approx 60,26°$
3) $\widehat{STR} \approx 37,87$

Corrigé de l'exercice 42

$MN = \sqrt{89 - 40\sqrt{2}}$

Corrigé de l'exercice 43

1) Faites-là.
2) $\overrightarrow{IK} = -\overrightarrow{KI}$.
3) $\overrightarrow{IJ} \cdot \overrightarrow{IK} = -11,5$.
4) $\widehat{JIK} \simeq 125,1°$

Corrigé de l'exercice 44

1) a) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 64,5$.
   b) $\widehat{A} \simeq 39,8°$.
2) $\widehat{B} \simeq 106,1°$ puis $\widehat{C} \simeq 34,1°$.

Corrigé de l'exercice 45

1) Utilisez a relation de Chasles.
2) Utilisez l'égalité précédente.

Corrigé de l'exercice 46

1) $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = \sqrt{37}CB'$.
2) $CB' = \dfrac{28}{\sqrt{37}}$ puis $BB' = \dfrac{17\sqrt{37}}{37}$.
3) L'aire de ABC est 8,5 u.a.

Corrigé de l'exercice 47

1) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = 32$
2) $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BI} = -8$
3) $\overrightarrow{BH} \cdot \overrightarrow{CA} = 16$
4) $\overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{FH} = 12$
5) $\overrightarrow{HG} \cdot \overrightarrow{BC} = -8$
6) $\overrightarrow{GI} \cdot \overrightarrow{FD} = 8$

Corrigé de l'exercice 48

1) $\overrightarrow{HO} \cdot \overrightarrow{HF} = a^2$
2) $\overrightarrow{EF} \cdot \overrightarrow{EB} = a^2$
3) $\overrightarrow{CH} \cdot \overrightarrow{GE} = \dfrac{1}{2}a^2$
4) $\overrightarrow{EO} \cdot \overrightarrow{FE} = -\dfrac{1}{2}a^2$
5) $\overrightarrow{OG} \cdot \overrightarrow{FH} = 0$
6) $\overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{CA} = \dfrac{1}{2}a^2$
7) $\overrightarrow{OE} \cdot \overrightarrow{OB} = -\dfrac{1}{4}a^2$
8) $\overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{CO} = \dfrac{1}{4}a^2$
9) $\overrightarrow{EB} \cdot \overrightarrow{EG} = \dfrac{1}{2}a^2$

Corrigé de l'exercice 49

Corrigé de l'exercice 50

Corrigé de l'exercice 51

Corrigé de l'exercice 52

Corrigé de l'exercice 53

Corrigé de l'exercice 54