Parcours d'exercices

Dérivation (1)

4

ANALYSE

Pour s'échauffer

Essai 1 : .../10

Essai 2 : .../10

Essai 3 : .../10

Essai 4 : .../10

Lien du parcours

Pour s'évaluer

1 Nombre dérivé

Exercice 1

Utiliser la définition du nombre dérivé pour les questions suivantes.

1) Soit f la fonction définie pour tout x de $\mathbb{R}$ par $f(x) = -4x - 1$.
Déterminer la valeur de $f'(-2)$.
2) Soit f la fonction définie pour tout x de $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \frac{1}{x}$.
Déterminer la valeur de $f'(5)$.
3) Soit f la fonction définie pour tout x de $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$.
Déterminer la valeur de $f'(-1)$.
4) Soit f la fonction définie pour tout x de $\mathbb{R}_+$ par $f(x) = \sqrt{x}$.
Déterminer la valeur de $f'(1)$.

MathALÉA

Exercice 2

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$.
Soit h un réel non nul et a un réel quelconque.

1) Calculer le taux d'accroissement de f entre a et $a+h$.
2) En déduire le taux d'accroissement de f entre 2 et 5.

Exercice 3

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x^2 - 4x + 5$.

1) Établir que pour tout réel $h \neq 0$,
$$\frac{g(3+h) - g(3)}{h} = h + 2$$
2) En déduire que g est dérivable en 3 et préciser la valeur du nombre dérivé de g en 3.

Exercice 4

Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $h(x) = \frac{1}{x}$.
Calculer $\frac{h(5) - h(3)}{2}$. Interpréter ce résultat.

Exercice 5

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g : x \longmapsto 5x^2$ et h un nombre réel non nul.

1) Calculer $g(1)$.
2) Exprimer $g(1+h)$ en fonction de h.
3) Exprimer en fonction de h le taux de variation de g entre 1 et $1+h$ et simplifier l'expression au maximum

Ed. Magnard

Exercice 6

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = 1 - x^2$.
Soit h un réel non nul et a un réel quelconque.

1) Calculer le taux d'accroissement de g entre a et $a+h$.
2) En déduire le taux d'accroissement de g entre -2 et 6.

Exercice 7

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$f(x) = 3x^2 + 5x + 4$$

1) Établir que pour tout réel $h \neq 0$,
$$\frac{f(2+h) - f(2)}{h} = 3h + 17$$
2) En déduire que f est dérivable en 2 et préciser la valeur du nombre dérivé de f en 2.

Exercice 8

f est la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ par :
$$f(x) = x - \frac{1}{x}.$$

1) Vérifier que pour tout h tel que $h \neq 0$ et $1+h > 0$:
$$f(1+h) = \frac{2h + h^2}{1+h}.$$
2) En déduire que f est dérivable en 1 et calculer $f'(1)$.

Exercice 9

Montrer que la fonction f définie par :
$f(x) = \dfrac{2}{x}$ est dérivable en $a = 1$. Donner $f'(1)$.

Exercice 10

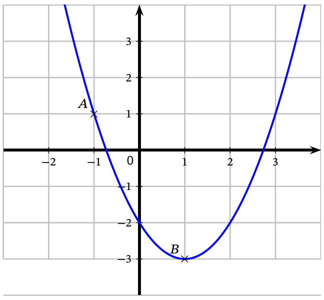
Montrer que la fonction u définie par :
$u(x) = \sqrt{x-1}$ n'est pas dérivable en $a = 1$.

Exercice 11

Montrer que la fonction f définie par $f(x) = x^3$ est dérivable en $a = 4$. Donner $f'(4)$.

Exercice 12

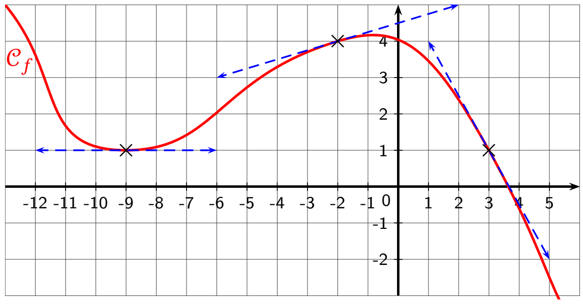
La courbe représentative d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ passe par les points A et B. Quel est le taux de variation de f entre -1 et 1 ?



Ed. Magnard

Exercice 14

On donne sur la figure ci-dessous la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ d'une fonction définie f sur $\mathbb{R}$ ainsi que les tangentes à cette courbe en certains points.

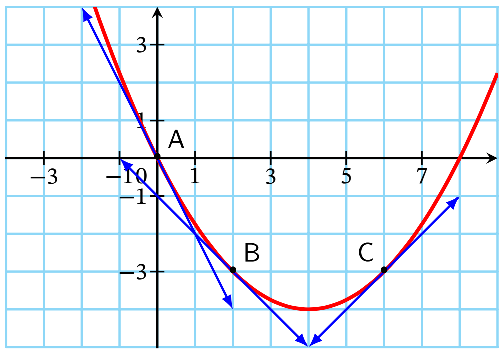


1) Donner $f(3)$, $f(-2)$ et $f(-9)$.
2) Donner $f'(3)$, $f'(-2)$ et $f'(-9)$.
3) Donner les équations des tangentes correspondantes.

Exercice 15

La fonction f représentée ci-dessous est dérivable pour tout nombre a.

1) Par lecture graphique, donner les nombres $f'(0)$, $f'(2)$ et $f'(6)$.
2) Déterminer une équation de la tangente à $\mathscr{C}_f$ aux points A, B et C.
3) Il existe un nombre x_0 tel que $f'(x_0) = 0$. Quel est ce nombre ?

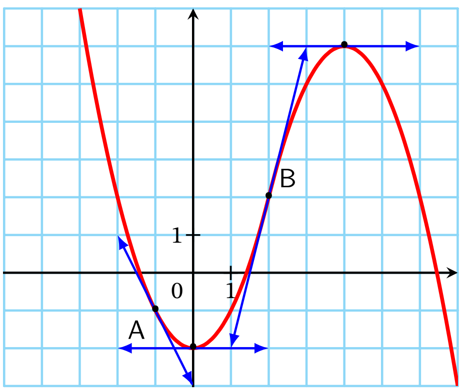


2 Nombre dérivé et tangente

Exercice 13

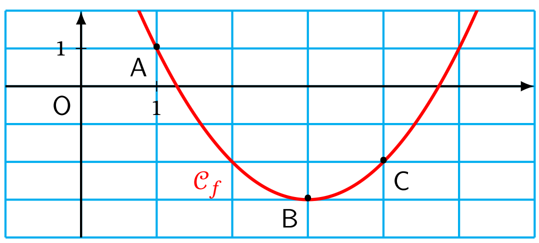
La fonction f représentée ci-dessous est dérivable pour tout nombre a.

1) Par lecture graphique, donner les nombres $f'(0)$ et $f'(4)$.
2) a) Par lecture graphique, déterminer les nombres $f'(-1)$ et $f'(2)$.
   b) Déterminer une équation de la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point A et celle au point B.
3) On sait que $f'(3) = 2$.
   Tracer la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 3.



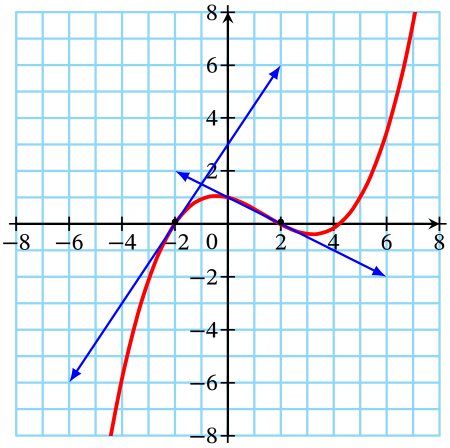
Exercice 16

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$.
f est dérivable en 1, en 3 et en 4 et telle que :
$f'(1) = -4$; $f'(3) = 0$; $f'(4) =$
2 Construire les tangentes à la courbe $\mathscr{C}_f$ aux points A, B et C et donner les équations réduites de chacune d'elles.



Exercice 17

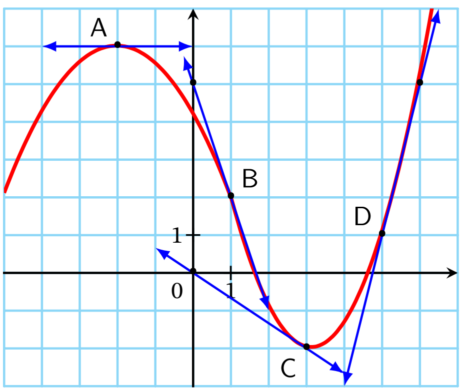
La courbe ci-dessous représente une fonction f.
Donner les nombres dérivés $f'(-2)$ et $f'(2)$.



Exercice 18

La fonction f représentée ci-dessous est dérivable pour tout nombre a.

1) Par lecture graphique, donner la pente de la tangente aux points A, B, C et D.
2) En déduire une équation de chacune des tangentes.



Exercice 19

Soit f une fonction dérivable sur $[-5; 5]$ et $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative.
On sait que $f(-1) = 2$ et que $f'(-1) = 2$.

Déterminer une équation de la tangente (T) à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse -1, en utilisant la formule de cours de l'équation de tangente.

MathALÉA

Exercice 20

Soit f une fonction dérivable sur $[-5; 5]$ et $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative.
On sait que $f(-1) = 2$ et que $f'(-1) = 2$.

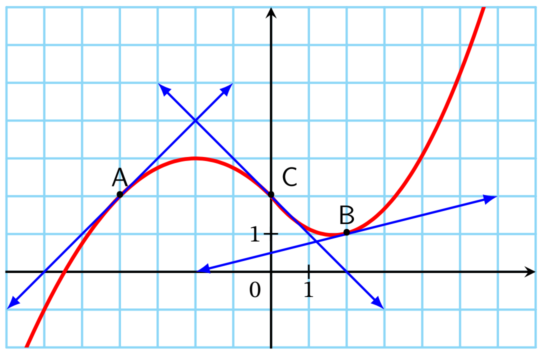
Déterminer une équation de la tangente (T) à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse -1, sans utiliser la formule de cours de l'équation de tangente.

MathALÉA

Exercice 21

La fonction f représentée ci-dessous est dérivable pour tout nombre a.

1) Par lecture graphique, donner la pente de la tangente aux points A, B et C.
2) En déduire une équation de chacune des tangentes.



Exercice 22

Soit une fonction g définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $g(4) = -1$ et $g'(4) = 2$.
Soit $\mathcal{C}_g$ sa courbe représentative.
Déterminer l'équation réduite de la tangente à $\mathcal{C}_g$ au point d'abscisse 4.

Ed. Magnard

Exercice 23

Soit une fonction h définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $h(-3) = 7$ et $h'(-3) = -4$. Soit $\mathcal{C}_h$ sa courbe représentative.
Déterminer l'équation réduite de la tangente à $\mathcal{C}_h$ au point d'abscisse -3.

Ed. Magnard

Exercice 24

Soit une fonction u définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $u'(2) = 17$. Sa courbe représentative $\mathcal{C}_u$ passe par le point $A(2\ ;\ 7)$.
Déterminer l'équation réduite de la tangente à $\mathcal{C}_u$ au point d'abscisse 2.

Exercice 25

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :
$g(x) = (2x^2 - 5x + 4)^{10}$.
On admet que g est dérivable en 1, et que $g'(1) = -10$.
Déterminer l'équation réduite de la tangente à la courbe représentative de g au point d'abscisse 1.

Ed. Magnard

3 Fonctions dérivées

Exercice 26

Déterminer la fonction dérivée.

1) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $m \in \mathbb{R}$ et $p \in \mathbb{R}$, définie par $f(x) = mx + p$.
2) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $m \in \mathbb{R}$ et $p \in \mathbb{R}$, définie par $g(x) = 0{,}46x - 6{,}41$.
3) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, définie par $h(x) = 3x^{12}$.
4) Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, définie par $l(x) = \dfrac{-8}{9x}$.
5) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, définie par $m(x) = \dfrac{1}{6}x^{11}$.

MathALÉA

Exercice 27

Pour chacune des fonctions suivantes, déterminer l'expression de sa fonction dérivée.

1) $f(x) = -3x^2 + 2x - 6$
2) $g(x) = -4x^2 - 9$
3) $h(x) = -6x^3 + 9x^2 + 9x - 5$

MathALÉA

Exercice 28

Pour chacune des fonctions suivantes, déterminer l'expression de sa fonction dérivée.

1) $f(x) = \dfrac{x}{7} + \dfrac{1}{9}$
2) $g(x) = \dfrac{5x^2}{9} + \dfrac{3x}{4} + \dfrac{8}{9}$

MathALÉA

Exercice 29

1) Donner l'expression de la dérivée de la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f(x) = -3x^2 - 5x - \sqrt{x} + \dfrac{4}{x}$.
2) Donner l'expression de la dérivée de la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f(x) = -2\sqrt{x} + \dfrac{1}{x}$.
3) Donner l'expression de la dérivée de la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = -2x^2 + \dfrac{4}{x}$.
4) Donner l'expression de la dérivée de la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+$ par $f(x) = -2x^2 - \sqrt{x}$.
5) Donner l'expression de la dérivée de la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f(x) = \dfrac{3}{x} - 2x^2 - 5x - 3\sqrt{x}$.

MathALÉA

Exercice 30

Pour chacune des fonctions suivantes, déterminer l'expression de sa fonction dérivée.

1) $f(x) = -6x^2\sqrt{x}$
2) $g(x) = 5(-2x - 3)x^2$
3) $h(x) = (5x^2 - 8x - 1)\sqrt{x}$

MathALÉA

Exercice 31

Pour chacune des fonctions suivantes, déterminer l'expression de sa fonction dérivée.

1) Donner l'expression de la dérivée de f définie pour tout $x \in \mathbb{R}\backslash\{\frac{8}{7}\}$ par : $f(x) = \dfrac{4x - 2}{7x - 8}$
2) Donner l'expression de la dérivée de g définie pour tout $x \in \mathbb{R}\backslash\{\frac{4}{3}\}$ par : $g(x) = \dfrac{-3x + x^2 + 4}{4 - 3x}$
3) Donner l'expression de la dérivée de h définie pour tout $x \in \mathbb{R}\backslash\{\frac{7}{3}\}$ par : $h(x) = \dfrac{x^9}{7 - 3x}$

MathALÉA

Exercice 32

Pour chacune des fonctions suivantes, déterminer l'expression de sa fonction dérivée.

1) $f(x) = \sqrt{-5x - 6}$
2) $g(x) = \dfrac{1}{6x - 10}$
3) $h(x) = (-6x + 4)^4$

MathALÉA

Exercice 33

Déterminer les fonctions dérivées des fonctions définies par :

1) $f(x) = \dfrac{1}{2x + 6}$
2) $g(x) = \dfrac{5}{3x - 5}$
3) $h(x) = \dfrac{-4}{2 - 6x}$
4) $\ell(x) = \dfrac{2x + 1}{x + 3}$
5) $t(x) = \dfrac{4 - x}{x}$
6) $s(x) = \dfrac{4x + 5}{1 - 2x}$

Exercice 34

Pour chacune des fonctions suivantes, donner son ensemble de définition, son ensemble de dérivabilité puis calculer sa dérivée.

1) $f : x \mapsto x^{1000} - 4x + 1$
2) $f : x \mapsto (x + 1)\sqrt{x}$
3) $f : x \mapsto \dfrac{1}{x^2 + 1}$
4) $f : x \mapsto \dfrac{x}{x - 1}$

Exercice 35

Calculer la dérivée de chacune des fonctions définies par :

1) $f(x) = 5x^3 - \dfrac{1}{2}x^2 - \dfrac{1}{x}$
2) $g(x) = x^2\sqrt{x}$
3) $h(x) = \dfrac{3}{x^3 + 1}$
4) $\ell(x) = \dfrac{5x^2}{2x + 1}$

(Correction)

Corrigé de l'exercice 1

1) Pour déterminer $f'(-2)$, on commence par calculer le taux de variation de f, entre -2 et $-2+h$, noté $\tau(h)$, où h est un réel non-nul.

$$\begin{aligned}
\tau(h) &= \frac{f(-2+h)-f(-2)}{h} && \text{Définition du taux de variation}\\
&= \frac{-4(-2+h)-1-(-4)\times(-2)+1}{h} && \text{Application à la fonction } f(x)=-4x-1\\
&= \frac{8-4h-1-8+}{h} && \text{Développement au numérateur}\\
&= \frac{-4h}{h} && \text{Réduction au numérateur}\\
&= -4 && \text{Simplification par } h
\end{aligned}$$

Le taux de variations de f est une constante qui ne dépend pas de h.
Ce résultat était prévisible puisque la représentation graphique d'une fonction affine est une droite.
La pente entre deux points de la droite est donc toujours égale au coefficient directeur de la fonction affine, ici -4.
On en déduit facilement la limite du taux de variations quand h tend vers 0.
$\lim\limits_{h\to 0} -4 = -4$
On peut en conclure que f est dérivable en -2 et donc $f'(-2) = -4$.

2) Pour déterminer $f'(5)$, on commence par calculer le taux de variation de f, entre 5 et $5+h$, noté $\tau(h)$, où h est un réel non-nul.

$$\begin{aligned}
\tau(h) &= \frac{f(5+h)-f(5)}{h} && \text{Définition du taux de variation}\\
&= \frac{\frac{1}{5+h}-\frac{1}{5}}{h} && \text{Application à la fonction inverse.}\\
&= \frac{\frac{5}{(5+h)\times 5}-\frac{5+h}{5\times(5+h)}}{h} && \text{Mise au même dénominateur.}\\
&= \frac{\frac{5-5-h}{(5+h)\times 5}}{h} && \text{Réduction au numérateur.}\\
&= \frac{-h}{(5+h)\times 5}\times\frac{1}{h} && \text{Diviser par } h\text{, c'est multiplier par } \frac{1}{h}.\\
&= \frac{-1}{(5+h)\times 5} && \text{Simplification par } h
\end{aligned}$$

On cherche maintenant la limite du taux de variations quand h tend vers 0.
$\lim\limits_{h\to 0} \frac{-1}{(5+h)\times 5} = \frac{-1}{25}$
On peut donc conclure que $f'(5) = \frac{-1}{25}$.

3) Pour déterminer $f'(-1)$, on commence par calculer le taux de variation de f, entre -1 et $-1+h$, noté $\tau(h)$, où h est un réel non-nul.

$$\begin{aligned}
\tau(h) &= \frac{f(-1+h)-f(-1)}{h} && \text{Définition du taux de variation}\\
&= \frac{(-1+h)^2-(-1)^2}{h} && \text{Application à la fonction carré.}\\
&= \frac{(-1)^2+2\times(-1)\times h+h^2-(-1)^2}{h} && \text{Développement de l'identité remarquable.}\\
&= \frac{1-2h+h^2-1}{h} && \text{Simplification au numérateur.}\\
&= \frac{-2h+h^2}{h} && \text{Réduction au numérateur.}\\
&= \frac{h(-2+h)}{h} && \text{Factorisation par } h \text{ au numérateur.}\\
&= -2+h && \text{Simplification par} h
\end{aligned}$$

On cherche maintenant la limite du taux de variations quand h tend vers 0.
$\lim_{h \to 0} -2 + h = -2$
Comme la limite existe, on peut en déduire que f est dérivable en -1
et on peut conclure que $f'(-1) = -2$.

4) Pour déterminer $f'(1)$, on commence par calculer le taux de variation de f,
entre 1 et $1 + h$, noté $\tau(h)$, où h est un réel non-nul.

$$\begin{aligned}
\tau(h) &= \frac{f(1+h) - f(1)}{h} && \text{Définition du taux de variation} \\
&= \frac{\sqrt{1+h} - \sqrt{1}}{h} && \text{Application à la fonction racine carrée.} \\
&= \frac{(\sqrt{1+h} - \sqrt{1})(\sqrt{1+h} + \sqrt{1})}{h(\sqrt{1+h} + \sqrt{1})} && \text{Multiplication par la "quantité conjuguée".} \\
&= \frac{1 + h - 1}{h(\sqrt{1+h} + \sqrt{1})} && \text{Identité remarquable : } (a-b)(a+b) = a^2 - b^2 \\
&= \frac{h}{h(\sqrt{1+h} + \sqrt{1})} && \text{Réduction au numérateur .} \\
&= \frac{1}{\sqrt{1+h} + \sqrt{1}} && \text{Simplification de la fraction par } h.
\end{aligned}$$

On cherche maintenant la limite du taux de variations quand h tend vers 0.
$\lim_{h \to 0} \frac{1}{\sqrt{1+h} + \sqrt{1}} = \frac{1}{2\sqrt{1}}$
On peut donc conclure que $f'(1) = \frac{1}{2}$.

Corrigé de l'exercice 2

1) $2a + h$

2) 7

Corrigé de l'exercice 3

1) Le résultat est donné. Soyez prudent ...

2) Le quotient calculé est le taux d'accroissement de f entre a et $a + h$.
On calcule sa limite lorsque h tend vers 0, on trouve 2. Donc $g'(3) = 2$.

Corrigé de l'exercice 4

$-\frac{1}{15}$

Corrigé de l'exercice 5

1) $g(1) = 5$.

2) $g(1 + h) = 5 + 10h + 5h^2$.

3) $10 + 5h$

Corrigé de l'exercice 6

1) $-2a - h$

2) -4

Corrigé de l'exercice 7

1) Le résultat est donné.

2) $f'(2) = 17$

Corrigé de l'exercice 8

1) Le résultat est donné.

2) $f'(1) = 2$

Corrigé de l'exercice 9

1) Le résultat est donné.

2) $f'(1) = -2$

Corrigé de l'exercice 10
Calculez la limite du taux d'accroissement $t(h)$ de u entre 1 et $1 + h$.
On trouve $+\infty$.

Corrigé de l'exercice 11
$f'(4) = 48$

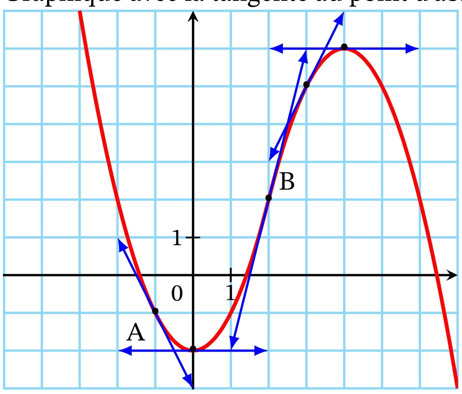
Corrigé de l'exercice 12
-2

Corrigé de l'exercice 13

1) $f'(0) = 0$ et $f'(4) = 0$.

2) a) $f'(-1) = -2$ et $f'(2) = 4$.
   b) En A : $y = -2x - 3$ et en B : $y = 4x - 6$.

3) Graphique avec la tangente au point d'abscisse 3.



Corrigé de l'exercice 14

1) $f(3) = 1$, $f(-2) = 4$ et $f(-9) = 1$.

2) $f'(3) = -\dfrac{3}{2}$, $f'(-2) = \dfrac{1}{3}$ et $f'(-9) = 0$.

3) $T_{-9}\ :\ y = 1$, $T_{-2}\ :\ y = \dfrac{1}{3}x + \dfrac{9}{2}$ et $T_3\ :\ y = -\dfrac{3}{2}x + \dfrac{11}{2}$.

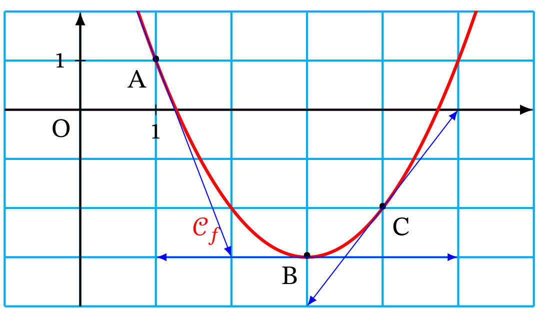
Corrigé de l'exercice 15

1) $f'(0) = -2$, $f'(2) = -1$ et $f'(6) = 1$

2) $T_A\ :\ y = -2x$, $T_B\ :\ y = -x - 1$ et $T_C\ :\ y = x - 9$.

3) $x_0 = 4$

Corrigé de l'exercice 16



Corrigé de l'exercice 17
$f'(-2) = \dfrac{3}{2}$ et $f(2) = -\dfrac{1}{2}$.

Corrigé de l'exercice 18

1) En A : 0, en B : -3, en C : $-\frac{2}{3}$, en D : 4.

2) En A : $y = 6$, en B : $y = -3x + 5$, en C : $y = -\frac{2}{3}x$ et en D : $y = 4x - 19$.

Corrigé de l'exercice 19

$-1 \in [-5; 5]$ donc la fonction est dérivable en -1.

On peut donc appliquer la formule de cours qui donne une équation de la tangente (T) au point d'abscisse -1 :

$(T) : y = f'(a)(x - a) + f(a)$ On cite la relation de cours.

$(T) : y = f'(-1)(x - (-1)) + f(-1)$ On applique à l'énoncé.

$(T) : y = 2(x - (-1)) + 2$ On remplace les valeurs connues.

$(T) : y = 2(x + 1) + 2$ On simplifie l'expression.

$(T) : y = 2x + 2 + 2$ On développe.

On peut conclure que : $(T) : y = 2x + 4$.

Corrigé de l'exercice 20

On sait que la tangente n'est pas une droite verticale, puisque la fonction est dérivable sur l'intervalle.

On en déduit que la tangente (T) au point d'abscisse -1, admet une équation réduite de la forme : $(T) : y = mx + p$.

• Détermination de m :

On sait que le nombre dérivé en -1 est par définition, le coefficient directeur de la tangente au point d'abscisse -1.

Par conséquent, on a déjà : $m = f'(-1) = 2$.

On en déduit que $(T) : y = 2x + p$

• Détermination de p :

Pour cela, on utilise que si $f(-1) = 2$, alors le point A de coordonnées $(-1; 2)$ appartient à $\mathcal{C}_f$ mais aussi à (T).

On peut écrire $A(-1; 2) = \mathcal{C}_f \cap (T)$.

On remplace alors les coordonnées de $A(-1; 2)$ dans l'équation $(T) : y = 2x + p$.

$$\begin{aligned} & A(-1;2) \in (T) \\ \iff & 2 = 2 \times (-1) + p \\ \iff & p = 2 - 2 \times (-1) \\ \iff & p = 2 + 2 \\ \iff & p = 4 \end{aligned}$$

On peut conclure que : $(T) : y = 2x + 4$.

Corrigé de l'exercice 21

1) En A : 1, en B : $\frac{1}{4}$, en C : -1.

2) En A : $y = x + 6$, en B : $y = \frac{1}{4}x + \frac{1}{2}$ et en C : $y = -x + 2$.

Corrigé de l'exercice 22

$y = 2x–7$

Corrigé de l'exercice 23

$y = -4x - 5$

Corrigé de l'exercice 24

$y = 2x + 3$

Corrigé de l'exercice 25

$y = -10x + 11$

Corrigé de l'exercice 26

1) L'expression de la dérivée de la fonction f définie par $f(x) = mx + p$ est : $f'(x) = m$.

2) L'expression de la dérivée de la fonction g définie par $g(x) = 0{,}46x - 6{,}41$ est : $g'(x) = 0{,}46$.

3) L'expression de la dérivée de la fonction h définie par $h(x) = 3x^{12}$ est : $h'(x) = 36x^{11}$.

4) L'expression de la dérivée de la fonction l définie par $l(x) = \frac{-8}{9x}$ est : $l'(x) = \frac{8}{9x^2}$.

5) L'expression de la dérivée de la fonction m définie par $m(x) = \frac{1}{6}x^{11}$ est : $m'(x) = \frac{11}{6}x^{10}$.

Corrigé de l'exercice 27

1) $f'(x) = 2 \times (-3)x + 1 \times 2$.
   On effectue les produits.
   On obtient alors : $f'(x) = -6x + 2$.
2) $g'(x) = 2 \times (-4)x$.
   On effectue les produits.
   On obtient alors : $g'(x) = -8x$.
3) $h'(x) = 3 \times (-6)x^2 + 2 \times 9x + 1 \times 9$.
   On effectue les produits.
   On obtient alors : $h'(x) = -18x^2 + 18x + 9$.

Corrigé de l'exercice 28

1) $f'(x) = 1 \times \left(\frac{1}{7}\right)$.
   On effectue les produits.
   On obtient alors : $f'(x) = 0{,}14$.
2) $g'(x) = 2 \times \left(\frac{5}{9}\right)x + 1 \times \left(\frac{3}{4}\right)$.
   On effectue les produits.
   On obtient alors : $g'(x) = \frac{10}{9}x + \frac{3}{4}$.

Corrigé de l'exercice 29

1) $(-3x^2 - 5x)' = -6x - 5$
   $(-\sqrt{x})' = -\frac{1}{2\sqrt{x}}$
   $(\frac{4}{x})' = -\frac{4}{x^2}$
   L'expression de la dérivée de la fonction f définie par $f(x) = -3x^2 - 5x - \sqrt{x} + \frac{4}{x}$ est :
   $f'(x) = -6x - 5 - \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{4}{x^2}$.

2) $(-2\sqrt{x})' = -\frac{2}{2\sqrt{x}}$
   $(\frac{1}{x})' = -\frac{1}{x^2}$
   L'expression de la dérivée de la fonction f définie par $f(x) = -2\sqrt{x} + \frac{1}{x}$ est :
   $f'(x) = -\frac{2}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{x^2}$.

3) $(-2x^2)' = -4x$
   $(\frac{4}{x})' = -\frac{4}{x^2}$
   L'expression de la dérivée de la fonction f définie par $f(x) = -2x^2 + \frac{4}{x}$ est :
   $f'(x) = -4x - \frac{4}{x^2}$.

4) $(-2x^2)' = -4x$
   $(-\sqrt{x})' = -\frac{1}{2\sqrt{x}}$
   L'expression de la dérivée de la fonction f définie par $f(x) = -2x^2 - \sqrt{x}$ est :
   $f'(x) = -4x - \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

5) $(\frac{3}{x})' = -\frac{3}{x^2}$
   $(-2x^2 - 5x)' = -4x - 5$
   $(-3\sqrt{x})' = -\frac{3}{2\sqrt{x}}$
   L'expression de la dérivée de la fonction f définie par $f(x) = \frac{3}{x} - 2x^2 - 5x - 3\sqrt{x}$ est :
   $f'(x) = -\frac{3}{x^2} - 4x - 5 - \frac{3}{2\sqrt{x}}$.

Corrigé de l'exercice 30

1) f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$. Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$.
On rappelle le cours : si u, v sont deux fonctions dérivables sur un même intervalle I alors leur produit est dérivable sur I et on a la formule :

$$(u \times v)' = u' \times v + u \times v'.$$

Ici $f = u \times v$ avec :

$$u(x) = -6x^2$$
$$v(x) = \sqrt{x}.$$

On applique la formule rappellée plus haut :

$$f'(x) = \underbrace{-12x}_{u'(x)} \times \sqrt{x} + (-6x^2) \times \underbrace{\frac{1}{2\sqrt{x}}}_{v'(x)}.$$

On peut réduire un peu l'expression :

$$f'(x) = -12x\sqrt{x} - \frac{3x^2}{\sqrt{x}}.$$

2) g est dérivable sur $\mathbb{R}$. Soit $x \in \mathbb{R}$.
On rappelle le cours : si u, v sont deux fonctions dérivables sur un même intervalle I alors leur produit est dérivable sur I et on a la formule :

$$(u \times v)' = u' \times v + u \times v'.$$

Ici $g = u \times v$ avec :

$$u(x) = 5x^2$$
$$v(x) = -2x - 3.$$

On utilise la formule rappelée plus haut et on a

$$g'(x) = \underbrace{10x}_{u'(x)} \times (-2x - 3) + (5x^2) \times \underbrace{(-2)}_{v'(x)}.$$

On développe pour obtenir :

$$g'(x) = -20x^2 - 30x - 10x^2.$$

Puis, en regroupant les termes de même degré :

$$g'(x) = -30x^2 - 30x.$$

Remarque : on pourrait bien entendu développer avant de dériver.
Dans ce cas, $g(x) = -10x^3 - 15x^2$.
Et donc $g'(x) = -30x^2 - 30x$. Ce qui est bien cohérent avec le résultat trouvé plus haut.

3) h est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$. Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$.
On rappelle le cours : si u, v sont deux fonctions dérivables sur un même intervalle I alors leur produit est dérivable sur I et on a la formule :

$$(u \times v)' = u' \times v + u \times v'.$$

Ici $h = u \times v$ avec :

$$u(x) = 5x^2 - 8x - 1$$
$$v(x) = \sqrt{x}.$$

On utilise la formule rappelée plus haut et on a

$$h'(x) = \underbrace{(10x-8)}_{u'(x)} \times \sqrt{x} + (5x^2 - 8x - 1) \times \underbrace{\frac{1}{2\sqrt{x}}}_{v'(x)}.$$

L'énoncé ne demandant rien de plus, on se contente de simplifier l'expression :

$$h'(x) = (10x-8)\sqrt{x} + \frac{5x^2 - 8x - 1}{2\sqrt{x}}$$

Corrigé de l'exercice 31

1) On rappelle le cours : si u, v sont deux fonctions dérivables sur un même intervalle I, et que v ne s'annule pas sur I alors leur quotient est dérivable sur I et on a la formule :

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \times v - u \times v'}{v^2}.$$

Ici $f = \dfrac{u}{v}$ avec :

$$u(x) = 4x - 2,\ u'(x) = 4$$
$$v(x) = 7x - 8,\ v'(x) = 7.$$

Ici la formule ci-dessus est applicable pour tout x tel que $7x - 8 \neq 0$. C'est-à-dire $x \neq \dfrac{8}{7}$.
On obtient alors :

$$f'(x) = \frac{4(7x-8) - (4x-2) \times 7}{(7x-8)^2}.$$

D'où, en développant le numérateur :

$$f'(x) = \frac{28x - 32 - (28x - 14)}{(7x-8)^2}.$$

Les termes en x se compensent et on obtient :

$$f'(x) = \frac{-32 + 14}{(7x-8)^2}.$$

C'est-à-dire :

$$\boxed{f'(x) = \frac{-18}{(7x-8)^2}.}$$

2) On rappelle le cours : si u, v sont deux fonctions dérivables sur un même intervalle I, et que v ne s'annule pas sur I alors leur quotient est dérivable sur I et on a la formule :

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \times v - u \times v'}{v^2}.$$

Ici $g = \dfrac{u}{v}$ avec :

$$u(x) = -3x + x^2 + 4,\ u'(x) = 2x - 3$$
$$v(x) = 4 - 3x,\ v'(x) = -3.$$

Ici la formule ci-dessus est applicable pour tout x tel que $4 - 3x \neq 0$. C'est-à-dire $x \neq \dfrac{4}{3}$.
On obtient alors :

$$g'(x) = \frac{(2x-3)(4-3x) - (-3x + x^2 + 4) \times (-3)}{(4-3x)^2}.$$

D'où, en développant le numérateur :

$$g'(x) = \frac{-6x^2 + 17x - 12 - (-3x^2 + 9x - 12)}{(4-3x)^2}.$$

On réduit le numérateur pour obtenir :

$$\boxed{g'(x) = \frac{-3x^2 + 8x}{(4-3x)^2}.}$$

Remarque : la plupart du temps, on veut le signe de la dérivée. Il serait donc plus logique de factoriser le numérateur si possible, mais cela sort du cadre de cet exercice.

3) On rappelle le cours : si u, v sont deux fonctions dérivables sur un même intervalle I, et que v ne s'annule pas sur I alors leur quotient est dérivable sur I et on a la formule :

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \times v - u \times v'}{v^2}.$$

Ici $h = \dfrac{u}{v}$ avec :

$$u(x) = x^9,\ u'(x) = 9x^8$$
$$v(x) = 7 - 3x,\ v'(x) = -3.$$

Ici la formule ci-dessus est applicable pour tout x tel que $7 - 3x \neq 0$. C'est-à-dire $x \neq \dfrac{7}{3}$.
On obtient alors :

$$h'(x) = \frac{9x^8(-3x+7) - x^9 \times (-3)}{(7-3x)^2}.$$

D'où, en développant le numérateur :

$$h'(x) = \frac{-27x^9 + 63x^8 + 3x^9}{(7-3x)^2}.$$

On simplifie pour obtenir :

$$\boxed{h'(x) = \frac{-24x^9 + 63x^8}{(7-3x)^2}.}$$

Remarque : la plupart du temps, on veut le signe de la dérivée. Il serait donc plus logique de factoriser le numérateur, mais cela sort du cadre de cet exercice.

Corrigé de l'exercice 32

1) On rappelle le cours. Si x est un nombre réel tel que u soit dérivable en $ax+b$, alors $v : x \mapsto u(ax+b)$ est dérivable en x et on a :

$$v'(x) = a \times u'(ax+b).$$

Ici :

$$u(x) = \sqrt{x}$$
$$u'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$
$$a = -5$$
$$b = -6.$$

Soit x un réel de l'ensemble de dérivabilité de f. On a, en appliquant la formule ci-dessus :

$$f'(x) = -5 \times \frac{1}{2\sqrt{-5x-6}}.$$

D'où, en simplifiant :

$$f'(x) = \frac{-5}{2\sqrt{-5x-6}}.$$

2) On rappelle le cours. Si x est un nombre réel tel que u soit dérivable en $ax+b$, alors $v : x \mapsto u(ax+b)$ est dérivable en x et on a :

$$v'(x) = a \times u'(ax+b).$$

Ici :

$$u(x) = \frac{1}{x}$$
$$u'(x) = \frac{-1}{x^2}$$
$$a = 6$$
$$b = -10.$$

Soit x un réel de l'ensemble de dérivabilité de g. On a, en appliquant la formule ci-dessus :

$$g'(x) = 6 \times \frac{-1}{(6x-10)^2}.$$

D'où, en simplifiant :

$$g'(x) = \frac{-6}{(6x-10)^2}.$$

3) On rappelle le cours. Si x est un nombre réel tel que u soit dérivable en $ax+b$, alors $v : x \mapsto u(ax+b)$ est dérivable en x et on a :

$$v'(x) = a \times u'(ax+b).$$

Ici :

$$u(x) = x^4$$
$$u'(x) = 4x^3$$
$$a = -6$$
$$b = 4.$$

Soit x un réel de l'ensemble de dérivabilité de h. On a, en appliquant la formule ci-dessus :

$$h'(x) = -6 \times 4(-6x+4)^3.$$

D'où, en simplifiant :

$$h'(x) = -24(-6x+4)^3.$$

Corrigé de l'exercice 33

1) $f'(x) = \dfrac{-2}{(2x+6)^2}$

2) $g'(x) = \dfrac{-15}{(3x-5)^2}$

3) $h'(x) = \dfrac{5}{(x+3)^2}$

4) $\ell'(x) = \dfrac{2x^2-1}{x^2}$

5) $t(x) = \dfrac{-4}{x^2}$

6) $s(x) = \dfrac{14}{(1-2x)^2}$

Corrigé de l'exercice 34

1) f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. $f'(x) = 1000x^{999} - 4$

2) f est définie sur $[0\,;\,+\infty[$ et dérivable sur $]0\,;\,+\infty[$. $f'(x) = \sqrt{x} + \dfrac{x+1}{2\sqrt{x}}$

3) f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. $f'(x) = -\dfrac{2x}{(x^2+1)^2}$

4) f est définie et dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$. $f'(x) = -\dfrac{1}{(x-1)^2}$

Corrigé de l'exercice 35

1) $f'(x) = \dfrac{15x^4 - x^3 + 1}{x^2}$

2) $g'(x) = \dfrac{5x^2}{2\sqrt{x}}$

3) $h'(x) = \dfrac{-9x^2}{(x^3+1)^2}$

4) $\ell'(x) = \dfrac{-2-x^2}{x^2}$