Parcours d'exercices

Dérivation (2)

8

ANALYSE

Ce parcours d'exercices appartient à : ....

Parcours 1

1 – 2 – 3 – 4 – 5 – 6 – 7 – 8 – 9 – 10 – 11 – 12 – 13 – 14 – 15 – 16 – 17 – 18 – 19 – 20 – 21 – 22 – 23 – 24 – 25 – 26 – 27 – 28 – 29 – 30 – 31 – 32 – 33 – 34 – 35 →

Parcours 2

1 – 2 – 3 – 4 – 5 – 6 – 7 – 8 – 9 – 10 – 11 – 12 – 13 – 14 – 15 – 16 – 17 – 18 – 19 – 20 – 21 – 22 – 23 – 24 – 25 – 26 – 27 – 28 – 29 – 30 – 31 – 32 – 33 – 34 – 35 →

1 Lien Dérivée/Variations

Exercice 1

1) Soit f une fonction définie sur $[-3\ ;\ 5]$ et telle que :

x	-3		-1		0		5
$f(x)$	4	$\searrow$	-2	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

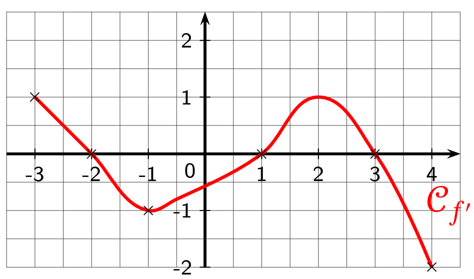
Dresser le tableau de signe de la fonction dérivée f'.

2) Soit f une fonction définie sur $[0\ ;\ 7]$ telle que :

x	0		2		4		7
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

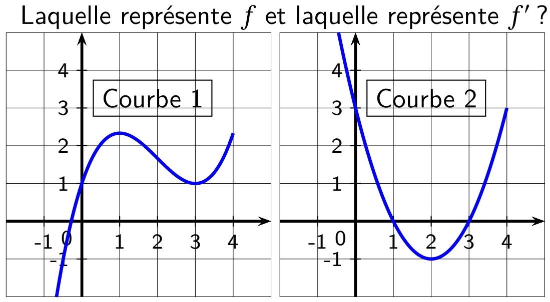
Donner le tableau de variations de f.

3) f est une fonction définie et dérivable sur $[-3\ ;\ 4]$. Voici la représentation graphique de sa fonction dérivée f' :



Déterminer les variations de la fonction f.

4) Les courbes ci-dessous représentent une fonction f définie sur l'intervalle $[-1\ ;\ 4]$ et sa fonction dérivée f'.
Laquelle représente f et laquelle représente f' ?



Exercice 2

Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ dont on donne le tableau de signes de $f'(x)$.

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Donner le sens de variation de f.

Exercice 3

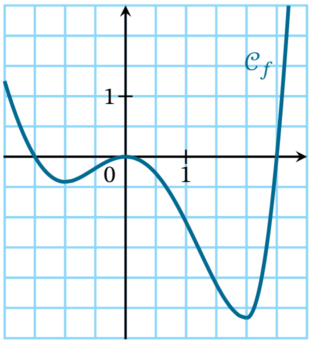
Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ dont on donne le tableau de variations ci-dessous.

x	$-\infty$		3		4		$+\infty$
f		$\searrow$	-2	$\nearrow$	0	$\searrow$	

Donner le signe de $f'(x)$.

Exercice 4

Soit f une fonction dérivable sur $[-2\ ;\ 3]$ dont on donne la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ ci-dessous.



1) Résoudre graphiquement les inéquations :
   a) $f(x) > 0$ c) $f'(x) > 0$
   b) $f(x) < 0$ d) $f'(x) < 0$
2) Existe-t-il un lien entre les signes de $f(x)$ et de $f'(x)$?
3) Résoudre graphiquement les équations :
   a) $f(x) = 0$ b) $f'(x) = 0$

Exercice 5

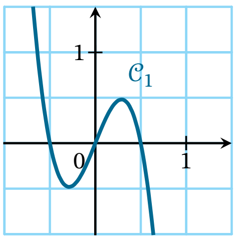
On donne ci-dessous le tableau de signes de la dérivée d'une fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

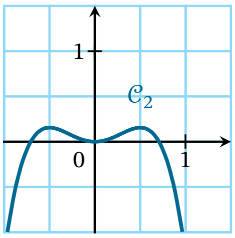
x	$-\infty$		-1		0		$\sqrt{2}$		4		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

On donne $f(-1) = 1$, $f(0) = 2$, $f(\sqrt{2}) = 0$ et $f(4) = 1$. Établir le tableau de variations de f.

Exercice 6

Voici deux courbes dont l'une représente une fonction f et l'autre sa dérivée f'.





Quelle est la courbe représentant f et quelle est celle représentant f' ?

Sésamath

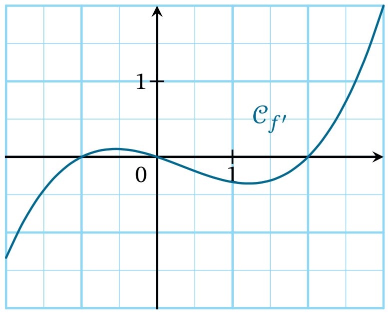
Exercice 7

Établir le tableau de variations de f sachant que f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}\setminus\{2\}$ et $f(0) = 1$ et $f(3) = 2$.

x	$-\infty$		0		2		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$+$	$\|\|$	$-$	0	$+$	

Exercice 8

On donne ci-dessous la courbe de la fonction dérivée d'une fonction f définie et dérivable sur $[-2\ ;\ 3]$.

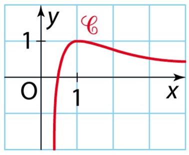


Établir le tableau de variations de f.

Sésamath

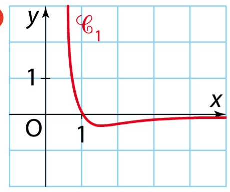
Exercice 9

La figure ci-contre est la représentation graphique $\mathcal{C}$ d'une fonction f dérivable sur $]0\ ;\ +\infty[$.

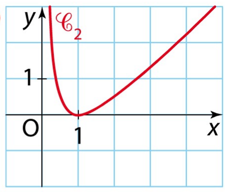


Parmi les trois courbes ci-dessous, quelle est celle qui est susceptible de représenter la fonction dérivée f' de f ?

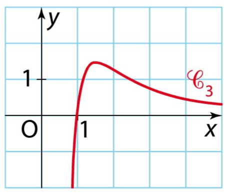
1



2



3



Exercice 10

On donne ci-dessous le tableau de signes de la dérivée d'une fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}^\star$ et $f(-1) = -2$ et $f(1) = 2$.

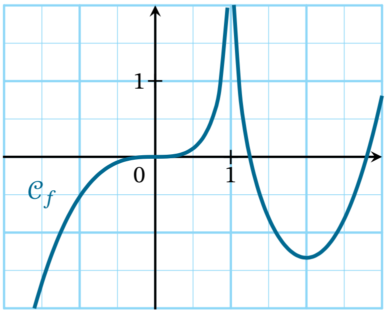
x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	$\|\|$	$-$	0	$+$	

1) Établir le tableau de variations de f.
2) Esquisser une courbe possible représentant f.

Sésamath

Exercice 11

On donne ci-dessous la représentation graphique d'une fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.



Établir le tableau de signes de $f'(x)$.

Sésamath

2 Variations

Exercice 12

Soit f définie par $f(x) = x^3 + x^2 - x$.

1) Déterminer l'ensemble de définition de f.
2) Déterminer $f'(x)$.
3) Étudier le signe de $f'(x)$.
4) En déduire les variations de f.

Exercice 13

Soit g la fonction définie sur $[0\ ;\ 3]$ par :
$g(x) = -x^2 + 2x + 1$

1) Calculer la dérivée de g puis déterminer le signe de cette dérivée.
2) Étudier le sens de variation de g sur $[0\ ;\ 3]$ et construire son tableau de variations.
3) Vérifier la cohérence avec le graphique réalisé avec une calculatrice.

Exercice 14

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0\ ;\ 7]$ par : $f(x) = x^3 - 9x^2 + 15x + 3$ Dresser le tableau de variations f sur $[0\ ;\ 7]$.

Exercice 15

Déterminer les variations des fonctions suivantes, définies sur $\mathbb{R}$.

1) $f : x \mapsto 2x^3 + 3x^2 - 5$
2) $g : x \mapsto -x^3 + 2x - 3$

Exercice 16

Déterminer les variations des fonctions suivantes, définies sur $\mathbb{R}$.

1) $u : x \mapsto x^4 - x^2 + 2$
2) $v : x \mapsto x^5 - x^3$

Exercice 17

Dans chaque cas, déterminer les variations de la fonction f définie par :

1) $f(x) = (x-1)\sqrt{x}$ pour $x \geqslant 0$.
2) $f(x) = x + \dfrac{1}{x}$ pour $x \neq 0$.

Exercice 18

Dans chaque cas, déterminer les variations de la fonction f définie par :

1) $f(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$ pour $x \in \mathbb{R}$.
2) $f(x) = \dfrac{x^2+x+1}{x^2-1}$ pour $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\ ;\ 1\}$

Exercice 19

f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :
$*f(x) = x^4 - 8x^2 + 2$.

1) Étudier les variations de f et dresser son tableau de variations.
2) Préciser les extremums locaux de f.
3) Dans chaque cas, donner un encadrement de $f(x)$ lorsque x vérifie la condition donnée :
   a) $x \in [-2\ ;\ 1]$;
   b) $0 \leqslant x \leqslant 3$;
   c) $x \in [-2\ ;\ 2]$.

Sésamath

Exercice 20

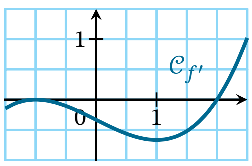
1) Soit g la fonction définie sur $]-4\ ;\ +\infty[$ par :
$$g(x) = x^3 + 6x^2 + 1.$$
   a) Déterminer les variations de g.
   b) En déduire le signe de $g(x)$.
2) Soit f la fonction définie sur $]-4\ ;\ +\infty[$ par :
$$f(x) = \frac{x^3-2}{x+4}.$$
   a) Déterminer $f'(x)$.
   b) À l'aide de la question **1)**, en déduire les variations de f.

Sésamath

3 Extréma et dérivées

Exercice 21

Soit f une fonction dérivable sur $\left[-\dfrac{3}{2}\ ;\ -\dfrac{5}{2}\right]$ dont on donne la courbe représentative $\mathcal{C}_{f'}$ de la dérivée.



1) Déterminer les valeurs de x en lesquelles f admet des extrema locaux.
2) Préciser la nature de ces extrema.

Exercice 22

Voici le tableau de signes de la fonction dérivée d'une fonction f.

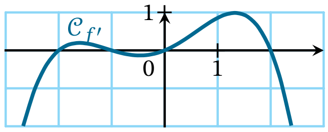
Sans établir le tableau de variations de f, dire en quelle(s) valeur(s) f admet-elle un (des) extremum (extrema) local (locaux) ? Préciser leur nature.

x	$-\infty$		-2		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$+$	

Sésamath

Exercice 23

Même consigne qu'à l'exercice précédent mais en considérant la courbe représentative de la dérivée d'une fonction f.



Sésamath

Exercice 24

Démontrer que, quel que soit le nombre x strictement positif, la somme de x et de son inverse est supérieure ou égal à 2.

Sésamath

Exercice 25

f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :
$f(x) = -2x^2 + 4x - 3$

1) Etudier les variations de f.

2) En déduire le minimum sur $\mathbb{R}$ de la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \dfrac{1}{f(x)}$.

Sésamath

4 Problèmes

Exercice 26

Soit $f : x \mapsto x^3 + x^2 - x$.

1) Déterminer les variations de f.

2) Déterminer l'équation de $\mathcal{T}$, tangente à $\mathcal{C}_f$ en $a = 0$.

3) On veut étudier la position relative de $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{T}$.

   a) Calculer $d(x) = f(x) - (mx+p)$, où $y = mx+p$ est l'équation de $\mathcal{T}$.

   b) Déterminer le signe de $d(x)$.

   c) Compléter :
   « Si $d(x) > 0$, alors $\mathcal{C}_f$ est ....de $\mathcal{T}$ ».
   « Si $d(x) < 0$, alors $\mathcal{C}_f$ est ....de $\mathcal{T}$ ».
   « Si $d(x) = 0$, alors ...... ».

   d) Dans un repère orthonormé, tracer $\mathcal{T}$ puis, à l'aide du tableau de variations de f, donner l'allure de la courbe $\mathcal{C}_f$.

Sésamath

Exercice 27

Même consigne qu'à l'exercice précédent avec la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{x}{x^2+1} \quad \text{et} \quad a = 0.$$

Sésamath

Exercice 28

Les fonctions f et g sont définies sur $\mathbb{R}$ par :
$f(x) = x^4 - 3x + 1$ et $g(x) = 2x^3 - 3x - 1$.
On note $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ les deux courbes.
Étudier la position relative de ces deux courbes.

Sésamath

Exercice 29

Dans le département de Charente-Maritime, lors d'une épidémie de grippe, le nombre de personnes malades n jours après l'apparition des premiers cas est estimée à $30n^2 - n^3$ (n est un entier tel que $0 \leqslant n \leqslant 30$).
Soit f la fonction définie sur $[0 ; 30]$ par :

$$f(x) = 30x^2 - x^3$$

1) Dresser le tableau de variations de f.

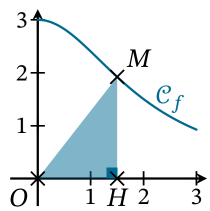
2) En déduire le jour où le nombre de personnes malades est maximal durant cette période de 30 jours ainsi que le nombre de personnes malades ce jour-là.

Sésamath

*

Exercice 30

Soit f la fonction définie sur $[0 ; +\infty[$ par :
$f(x) = \dfrac{12}{x^2+4}$.



On note $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative. Soit $M \in \mathcal{C}_f$ et H son projeté orthogonal sur l'axe des abscisses.
Le but de l'exercice est de déterminer l'aire maximale de OHM, ainsi que la ou les positions du point M rendant cette aire maximale.
On choisit x_M comme variable et on pose $x = x_M$.

1) Déterminer une expression de la fonction :
   $\mathcal{A} : x \mapsto \mathcal{A}_{OHM}$.

2) Déterminer les variations de cette fonction sur son ensemble de définition, que l'on précisera.

3) Répondre au problème posé.

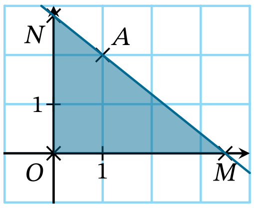
Sésamath

Exercice 31

Dans un repère orthonormé d'origine O, on considère le point $A(a ; b)$ où $a > 0$ et $b > 0$ et un point M sur l'axe des abscisses tel que $x_M > a$. La droite (AM)

Sésamath

coupe l'axe des ordonnées en un point N. Le but de l'exercice est de déterminer l'aire minimale de OMN ainsi que la ou les positions du point M rendant cette aire minimale.



1) Dans cette question, on étudie le cas $A(1\ ;\ 2)$.
   a) On pose $x = x_M$. Démontrer qu'une expression de la fonction $\mathcal{A} : x \mapsto \mathcal{A}_{OMN}$ est :
   $$\mathcal{A}(x) = \frac{x^2}{x-1}.$$
   b) Déterminer les variations de $\mathcal{A}$ sur son ensemble de définition.
   c) Répondre au problème posé.
   d) Lorsque l'aire est minimale, que peut-on dire des points A, M et N ?
2) Étudier le cas général, avec $A(a\ ;\ b)$.

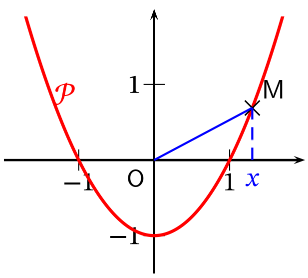
Exercice 32

Un fermier envisage de construire, le long du mur de sa grange, un enclos rectangulaire grillagé. Il souhaite que l'aire de son enclos soit de 200 m^2.
Pour clore trois côtés du rectangle (le 4ème étant le mur), il veut utiliser le minimum de grillage.
Quelles seront les dimensions de son enclos ?

Exercice 33

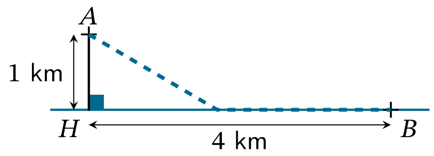
Dans un repère d'origine O, $\mathcal{P}$ est la parabole d'équation
$$y = x^2 - 1$$

1) Démontrer que $OM^2 = x^4 - x^2 + 1$.
2) On admet que la distance OM est minimale si, et seulement si, OM^2 est minimal.
   Déterminer la position du point M sur $\mathcal{P}$ pour laquelle la distance OM est minimale. Calculer alors cette distance.



Exercice 34

Un homme, symbolisé par le point A, est en pleine mer. Il doit rejoindre le point B situé sur le rivage, symbolisé par la droite (HB), en un temps minimum. On donne $AH = 1$ km et $HB = 4$ km.
Sachant qu'il se déplace dans l'eau à une vitesse de 3 km/h et sur terre à une vitesse de 7 km/h, où doit-il accoster ?

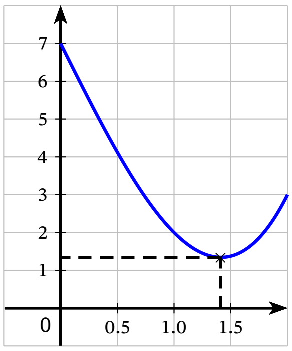


Vue de dessus.

Exercice 35

Voici la représentation graphique de la fonction f définie sur $[0\ ;\ 2]$ par :
$$f(x) = x^3 - 6x + 7$$

Déterminer la valeur exacte du minimum de cette fonction sur $[0\ ;\ 2]$.



(Correction)

Corrigé de l'exercice 1

1) Tableau de signe de la fonction dérivée f' :

x	-3		-1		0		5
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

2) Tableau de variations de f.

x	0		2		4		7
$f(x)$		↗		↘		↗	

3) Tableau de variations de f.

x	-3		-2		1		3		4
$f(x)$		↗		↘		↗		↘	

4) f est représentée par la courbe 1.

Corrigé de l'exercice 2

Tableau de variations de f.

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
$f(x)$		↘		↗		↘	

Corrigé de l'exercice 3

Tableau de signe de f' :

x	$-\infty$		3		4		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Corrigé de l'exercice 4

1) a) $S = [-2; -1,5[\cup \{0\} \cup]2,5; 3]$
   b) $S = -1,5; 0[\cup]0; 2,5[$
   c) $S =]-1; 0[\cup]2; 3]$
   d) $S = [-2; -1[\cup]0; 2[$

2) Non

3) a) $S = \{-1,5; 0; 2,5\}$
   b) $S = \{-1; 0; 2,5\}$

Corrigé de l'exercice 5

x	$-\infty$		-1		0		$\sqrt{2}$		4		$+\infty$
$f(x)$		↘	1	↗	2	↘	0	↗	1	↘	

Corrigé de l'exercice 6

f' est représentée par C_1. Il faut le justifier.

Corrigé de l'exercice 7

x	$-\infty$		0		2		3		$+\infty$
$f(x)$		↗		↗	‖	↘		↗	

Corrigé de l'exercice 8

x	-2		-1		0		2		3
$f(x)$		↘		↗		↘		↗	

Corrigé de l'exercice 9

C'est la courbe 1. À justifier bien sûr.

Corrigé de l'exercice 10

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f(x)$		↗		↘	‖	↘		↗	

Montrez la courbe à votre professeur.

Corrigé de l'exercice 11

x	$-\infty$		0		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$+$	‖	$-$	0	$+$	

Corrigé de l'exercice 12

1) $\mathbb{R}$

2) $f'(x) = 3x^2 + 2x - 1$.

3) Les deux tableaux réunis :

x	$-\infty$		-1		$\frac{1}{3}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		↗	1	↘	$\frac{-5}{27}$	↗	

Corrigé de l'exercice 13

1) $g'(x) = -2x + 2$

2) Les deux tableaux réunis :

x	0		1		3
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		$\searrow$	2	$\nearrow$	

Corrigé de l'exercice 14
Corrigé de l'exercice 15
Corrigé de l'exercice 16
Corrigé de l'exercice 17
Corrigé de l'exercice 18
Corrigé de l'exercice 19
Corrigé de l'exercice 20

Corrigé de l'exercice 21

1) f admet un extremum en 2 car $f'(x)$ s'y annule en changeant de signe.

2) Il s'agit d'un minimum car f est décroissante puis croissante.

Corrigé de l'exercice 22
Corrigé de l'exercice 23
Corrigé de l'exercice 24
Corrigé de l'exercice 25
Corrigé de l'exercice 26
Corrigé de l'exercice 27
Corrigé de l'exercice 28
Corrigé de l'exercice 29
Corrigé de l'exercice 30
Corrigé de l'exercice 31
Corrigé de l'exercice 32
Corrigé de l'exercice 33
Corrigé de l'exercice 34
Corrigé de l'exercice 35