Parcours d'exercices

Second degré

1

ALGÈBRE

Pour s'échauffer

Essai 1 : .../10

Essai 2 : .../10

Essai 3 : .../10

Essai 4 : .../10

Lien du parcours

Pour s'évaluer

1 Pour commencer

Exercice 1

Développer et réduire les expressions suivantes.

1) $(x+1)^2$
2) $(x-3)^2$
3) $(4-3x)^2$
4) $(5x-4)^2$

Exercice 2

Écrire sous forme développée.

1) $3(x+1)^2+5$
2) $-2(x-4)^2-2$
3) $-(x-6)^2-3$
4) $(x+5)^2+6$

Exercice 3

Écrire sous forme développée.

1) $(x+1)(x-4)$
2) $5x(x-7)$
3) $3(x-4)(x+2)$
4) $-2(x-4)(x+4)$

Exercice 4

Factoriser (si possible) les expressions suivantes.

1) x^2-9
2) $(x-5)^2-16$
3) $4x^2+25$
4) $(1-2x)^2-1$

Exercice 5

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes.

1) $x^2=9$
2) $2x^2=8$
3) $x^2+16=0$
4) $3x^2-6=0$

Exercice 6

f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=5-9x^2$

Donner une forme factorisée de $f(x)$.

Exercice 7

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x)=2x^2-4x-30$$

1) Montrer que $f(x)=(2x+6)(x-5)$.
2) Montrer que $f(x)=(2x+2)(x-3)-24$.

Exercice 8

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x)=x^2-6x+3$$

1) Calculer $g(3)$ puis $g(-1)$.
2) Déterminer les antécédents de 3 par g.

Exercice 9

Factoriser les expressions suivantes.

1) $A=(2x-3)(3x+4)+(2x-3)(6x-1)$
2) $B=x(x+5)+3(x+5)$

MathALÉA

2 Les différentes formes

Exercice 10

Pour chaque fonction ci-dessous, déterminer si c'est une fonction polynôme de degré 2.

1) $f(x)=x^2+2x-\sqrt{2}$
2) $g(x)=2(x-9)^2$
3) $h(x)=5x+9$
4) $u(x)=x^2+3$
5) $v(x)=(5x+6)(1-x)$
6) $w(x)=\dfrac{x^2+9x+3}{7}$
7) $a(x)=x^2+9x+\dfrac{3}{x}$
8) $b(x)=x^2+5\sqrt{x}$

Exercice 11

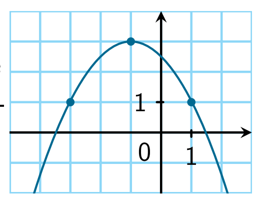
Déterminer la forme canonique de chacun des polynômes P.

1) $P(x)=3x^2-30x+76$
2) $P(x)=4x^2-8x-1$

MathALÉA

Exercice 12

Obtenir la forme canonique correspondant à la parabole ci-contre.



3 Variations et extremums

Exercice 13

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = -3x^2 + 9x - 5.$$

1) f admet-elle un maximum ou un minimum sur $\mathbb{R}$?
2) Dresser le tableau de variations de f.

Exercice 14

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3x^2+6x-7$.

1) Dresser le tableau de variations de f.
2) En déduire le(s) extremum(s) de f.

Exercice 15

Dire pour chaque fonction si elle admet un minimum ou un maximum et en quelle valeur il est atteint.

1) $f(x) = 3x^2 + 4$
2) $g(x) = -2(x-4)^2 + 8$
3) $h(x) = -2x^2 + 8x - 1$
4) $k(x) = 7(x+1)^2 - 25$

4 Équations - Factorisations

Exercice 16

Factoriser les expressions suivantes.

1) $A = -3x^2 + x$
2) $B = -49x - 63x^2$

MathALÉA

Exercice 17

Factoriser les expressions suivantes.

1) $A = x^2 - 25$
2) $B = 64x^2 - 1$

MathALÉA

Exercice 18

Factoriser les expressions suivantes.

1) $16x^2 - 36$
2) $16x^2 + 16x + 4$

MathALÉA

Exercice 19

Factoriser les expressions suivantes.

1) $\dfrac{1}{16}x^2 - 64$
2) $x^2 + 6x + 9$

MathALÉA

Exercice 20

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes.

1) $2x^2 - 10x = 0$
2) $x^2 - 36 = 0$
3) $x^2 + 2x + 1 = 0$
4) $4x^2 - 12x + 9 = 0$

Exercice 21

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes sans utiliser le discriminant.

1) $9x^2 - 6x + 1 = 0$
2) $(x+1)^2 - 7 = 0$
3) $x^2 = 3x$
4) $5 - x^2 = 0$

5 Discriminant - Racines

Exercice 22

Factoriser, si cela est possible, chaque polynôme suivant de degré 2 :

1) $-4x^2 + 5x + 2$
2) $3x^2 - 2x + 2$

MathALÉA

Exercice 23

Calculer le discriminant de chacune de ces expressions :

1) $A(x) = -3x^2 + 4x + 3.$
2) $B(x) = -5x^2 + x - 1.$

MathALÉA

Exercice 24

Déterminer, si elles existent, les racines des trinômes.

1) $f(x) = -2x^2 + 3x - 4$
2) $g(x) = \dfrac{1}{2}x^2 - 4x + 8$
3) $h(x) = -x^2 - 2x + 35$

Exercice 25

Sans utiliser le discriminant, mais en utilisant la forme canonique du polynôme, résoudre dans $\mathbb{R}$:

1) $3x^2 + 3x - 3 = 0$
2) $x^2 - 4x + 3 = 0$

MathALÉA

Exercice 26

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes.

1) $-2x^2 + 2x + 4 = 0$
2) $5x^2 - 20x + 24 = 0$

MathALÉA

Exercice 27

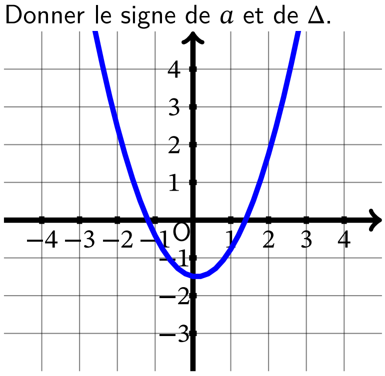
Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes.

1) $-x^2 - 1 - 2x = 0$
2) $x^2 - 30 = x$
3) $3x^2 - 17x - 10 = -7 + 9x^2 - 10x$

MathALÉA

Exercice 28

La courbe représente une fonction f définie par $f(x) = ax^2 + bx + c$.
Donner le signe de a et de Δ.



MathALÉA

6 Inéquations - Signes

Exercice 29

Sans calcul, dresser le tableau de signes de chaque fonction définie ci-dessous.

1) $f(x) = 2(x+2)(x-3)$
2) $g(x) = -2\left(x - \dfrac{1}{3}\right)^2$
3) $h(x) = x^2 + 5$

Exercice 30

Dresser le tableau de signes de chaque fonction définie ci-dessous.

1) $f(x) = 2x^2 - 4x - 16$
2) $g(x) = 9x^2 + 24x + 16$ $h(x) = 2x^2 - 5x + 6$

Exercice 31

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes sans utiliser le discriminant.

1) $x^2 - 2x > 0$
2) $x^2 - 81 \leqslant 0$
3) $(x-1,5)(x+2,8) > 0$
4) $x^2 + 20 < 0$

Exercice 32

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes.

1) $-x^2 - 4x + 5 \leqslant 0$
2) $-x^2 - 6x - 8 > 0$

MathALÉA

Exercice 33

Dresser le tableau de signes des fonctions suivantes.

1) $f(x) = \dfrac{-x^2 + 3x - 5}{(x-1)^2}$
2) $g(x) = \dfrac{3x^2 + 9x + 6}{(x+3)^2}$

Ed. Magnard

Exercice 34

Résoudre les inéquations suivantes.

1) $\dfrac{3x^2 - 4x + 7}{2x+1} \geqslant 0$
2) $\dfrac{5 - x}{-25x^2 + 10x - 1} < 0$

Ed. Magnard

7 S'entraîner/Chercher

Exercice 35

1) On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = -5x^2 - 35x - 7$.
Dresser le tableau de variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$.
2) On considère la fonction f définie sur $[3\,;\,7]$ par : $f(x) = 5x^2 - 45x - 7$.
Dresser le tableau de variations de la fonction f sur $[3\,;\,7]$.
3) Le tableau suivant est le tableau de signes d'une fonction polynôme du second degré.

x	$-\infty$		-4		2		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Dresser le tableau de variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$ sachant que son extrémum vaut -27.
4) On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = -5\left(x - \dfrac{3}{2}\right)^2 + \dfrac{21}{4}$.
Dresser le tableau de variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

Exercice 36

Soit f la fonction définie par : $f(x) = (x-10)^2 - 36$.
On note $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère.

1) Montrer que $f(x) = x^2 - 20x + 64$.
2) Montrer que $f(x) = (x-4)(x-16)$.
3) Répondre aux questions suivantes en utilisant l'écriture de $f(x)$ la mieux adaptée :
   a) Quelles sont les coordonnées du point d'intersection entre $\mathcal{C}_f$ et l'axe des ordonnées ?
   b) Quelles sont les coordonnées des points d'intersection entre $\mathcal{C}_f$ et l'axe des abscisses ?
   c) À l'aide de la représentation graphique $\mathcal{C}_f$, conjecturer le minimum de f.
   Démontrer cette conjecture et préciser en quelle valeur ce minimum est atteint.
   d) Déterminer les coordonnées des points d'intersection entre $\mathcal{C}_f$ et la droite d'équation $y = 64$.

MathALÉA

Exercice 37

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :
$f(x) = x^2 + 2x - 8$.(*Forme développée*)

1) Montrer que $f(x)$ peut aussi s'écrire :
$f(x) = (x+4)(x-2)$. (*Forme factorisée*)

2) Montrer que $f(x)$ peut aussi s'écrire :
$f(x) = (x+1)^2 - 9$. (*Forme canonique*)

3) Répondre aux questions suivantes en utilisant l'écriture de $f(x)$ la mieux adaptée :
   a) Résoudre l'équation $f(x) = -9$.
   b) Résoudre l'équation $f(x) = 0$.
   c) Calculer $f(0)$, $f(-4)$ puis $f(-1)$.
   d) Résoudre l'équation $f(x) = -8$.

MathALÉA

Exercice 38

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :
$f(x) = -3x^2 + 36x - 33$. (*Forme développée*)

1) Montrer que $f(x)$ peut aussi s'écrire :
$f(x) = -3(x-11)(x-1)$. (*Forme factorisée*)

2) Montrer que $f(x)$ peut aussi s'écrire :
$f(x) = -3(x-6)^2 + 75$. (*Forme canonique*)

3) Répondre aux questions suivantes en utilisant l'écriture de $f(x)$ la mieux adaptée :
   a) Résoudre l'équation $f(x) = 75$.
   b) Résoudre l'équation $f(x) = 0$.
   c) Résoudre l'équation $f(x) = -33$.
   d) Calculer $f(0)$, $f(1)$ puis $f(6)$.

MathALÉA

Exercice 39

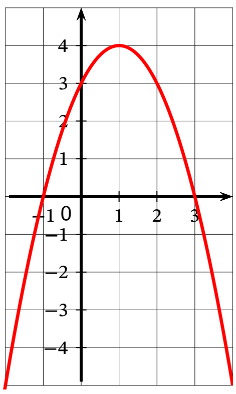
On donne la représentation graphique d'une fonction f polynôme du second degré.

1) Quelles sont les coordonnées du sommet S de la parabole ? Donner une équation de l'axe de symétrie.

2) Donner les racines de f et la valeur de $f(0)$.

3) Dresser les tableaux de signes et de variations de $f(x)$.

4) Déterminer l'expression algébrique de $f(x)$ sous forme factorisée, puis sous forme développée.

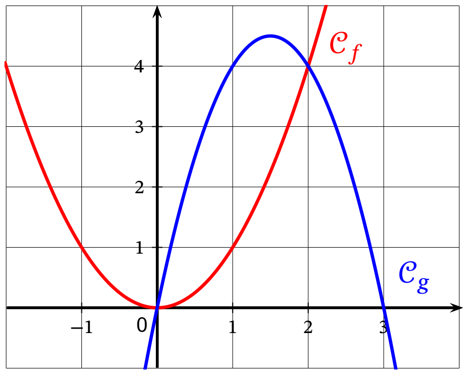


Exercice 40

$\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ sont les représentations graphiques des fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par :
$f(x) = x^2$ et $g(x) = 6x - 2x^2$

1) Conjecturer graphiquement l'ensemble des réels x pour lesquels $\mathcal{C}_g$ est au-dessus de $\mathcal{C}_f$.

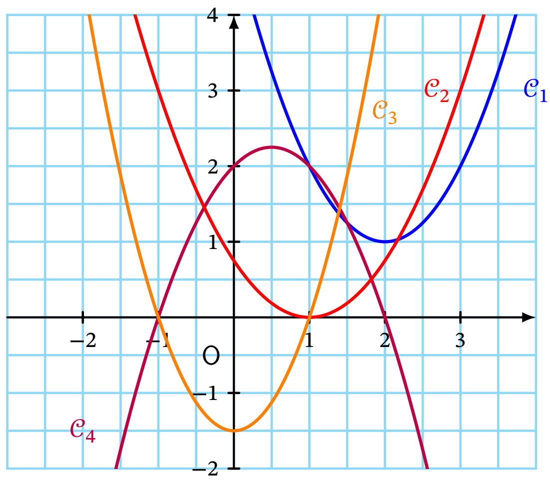
2) Résoudre le problème par le calcul.



MathGM

Exercice 41

Pour chaque fonction représentée, déterminer sa forme factorisée (si elle existe).



Exercice 42

Résoudre les équations suivantes :

1) $\dfrac{5x^2 - 12,5x - 7,5}{3-x} = 0$

2) $\dfrac{x+20}{10} = \dfrac{10}{x}$

Exercice 43

Résoudre les équations suivantes.

1) $(x-1)^2 = 2(x+3)^2$

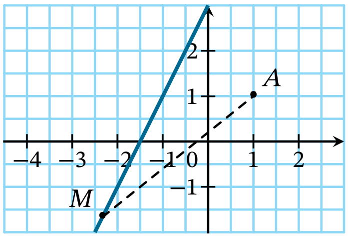
2) $2x + 1 = x^2$

3) $\dfrac{1}{x-2} + x + 3 = 0$

4) $\dfrac{3x-4}{x+1} = \dfrac{x-1}{2x+3}$

Exercice 44

On considère la droite d d'équation $y = 2x + 3$ et A le point de coordonnées $(1; 1)$. M est un point quelconque de la droite d et on note x l'abscisse de M.



1) On définit la fonction f par : $f(x) = AM^2$.
   a) Justifier que l'ordonnée de M est $y_M = 2x+3$. Vérifier que $f(x) = 5x^2 + 6x + 5$.
   b) Vérifier que l'expression $5\left(x + 0,6\right)^2 + 3,2$ est la forme canonique du trinôme f.
   c) Étudier les variations de la fonction f. Pour quelle valeur x_0 la fonction atteint-elle son extremum ?
   d) M_0 est le point de la droite d tel que la distance AM^2 soit minimale. Justifier que les coordonnées de M_0 sont $(-0,6; 1,8)$.
2) On considère le point B de coordonnées $(0; 3)$.
   a) Vérifier que B est un point de la droite d.
   b) Déterminer la nature du triangle ABM_0. Que peut-on dire des droites (AM_0) et d ?

Sésamath

Exercice 45

Un artisan fabrique des confitures qu'il vend par carton de dix pots.
Le coût en € de fabrication de x cartons de dix pots est $f(x) = 0,25x^2 + 500$, pour x compris 0 et 160.

1) a) Déterminer le coût de fabrication de 60 cartons de dix pots de confiture.
   b) Pour combien de cartons le coût de fabrication est de 2525 € ?
2) Chaque carton de confitures est vendu 30 € Exprimer la recette $R(x)$ en fonction de x.
3) Soit B la fonction bénéfice définie sur $[0; 160]$.
   a) Montrer que, pour tout $x \in [0; 160]$: $B(x) = -0,25x^2 + 30x - 500$
   b) Montrer que, pour tout $x \in [0; 160]$: $B(x) = -0,25(x - 100)(x - 20)$
4) Dresser les tableaux de signes et de variations de la fonction B.
5) Quel nombre de cartons doit vendre cet artisan si il veut réaliser un bénéfice positif ?
6) Quel est le nombre de cartons à vendre pour que son bénéfice soit maximal ? Calculer alors ce bénéfice.

BAC

Exercice 46

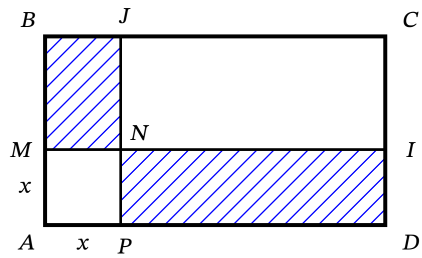
Un joueur de tennis frappe dans une balle avant qu'elle touche le sol.
La trajectoire de la balle est alors définie par la parabole d'équation $y = -0,03x^2 + 0,3x + 0,75$, où x correspond à la distance entre le joueur de tennis et la balle et y correspond à la hauteur de la balle.

1) Le filet se trouve à 5 m du joueur et la hauteur du filet est de 1 m.
   La balle passe-t-elle au-dessus du filet ? Justifier.
2) Déterminer à quelle distance du joueur la balle est retombée par terre.
   On donnera une valeur arrondie au centième.
3) À quelle(s) distance(s) du joueur la balle a-t-elle une hauteur supérieure ou égale à 1,02 m ?

Magnard

Exercice 47

$ABCD$ est un rectangle tel que $AB = 5$ et $AD = 10$. M étant un point du segment $[AB]$, on construit le carré $AMNP$ et le rectangle $NICJ$ comme indiqué sur la figure ci-dessous.
On pose $AM = x$ et on note $f(x)$ l'aire de la partie hachurée.
Donner l'ensemble de définition de la fonction f.



Pour quelles valeurs de x, l'aire de la partie hachurée est supérieure à 28 ?

Exercice 48

Soient a un réel non nul, b et c deux réels quelconques. On considère la parabole $\mathcal{P}$ d'équation $y = ax^2 + bx + c$. Montrer que le sommet de celle-ci a pour ordonnée $\dfrac{-\Delta}{4a}$.

Exercice 49

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = (x - 1)^2 + m - 1$$

1) Donner la forme développée de f.
2) Pour quelle(s) valeur(s) de m la parabole $\mathcal{P}$ passe-t-elle par le point $E(1\ ;\ 7)$?
3) Pour quelle(s) valeur(s) de m le minimum de la fonction f est-il égal à 9 ?
4) Pour quelle(s) valeur(s) de m la parabole représentative $\mathcal{P}$ de la fonction f coupe-t-elle l'axe des abscisses en un seul point ?

Exercice 50

On considère l'équation $(m+8)x^2+mx+1=0$. Pour quelles valeurs de m cette équation admet-elle une unique solution ?

Exercice 51

On donne le trinôme $f(x)=mx^2+4x+2(m-1)$.

1) Pour quelles valeurs de m l'équation $f(x)=0$ a-t-elle une seule solution ? Calculer alors cette solution.
2) a) Quel est l'ensemble des nombres m pour lesquels l'équation $f(x)=0$ a deux solutions distinctes ?
   b) Quel est l'ensemble des nombres m pour lesquels $f(x)<0$ pour tout nombre x ?

Exercice 52

Pour chaque affirmation, dire si elle est vraie ou fausse.
Le plan est muni d'un repère orthogonal. On donne $g : x \longmapsto -3x^2-2x+1$ et $h : x \longmapsto 3x^2+x+4$
On note C_g et C_h leurs courbes représentatives respectives.

1) C_g est une parabole « avec les bras vers le bas ».
2) Le discriminant de $g(x)$ est $\Delta_g=16$.
3) $g(x)=0$ admet une unique solution réelle.
4) -1 est une racine du polynôme $g(x)$.
5) $g(x)\leqslant 0$ a pour ensemble des solutions $\left[-1\ ;\ \dfrac{1}{3}\right]$.
6) $\left(-\dfrac{1}{3}\right)$ est l'abscisse du sommet de C_g.
7) g est strictement croissante sur $\left[-\dfrac{1}{3}\ ;\ +\infty\right[$.
8) Le discriminant de $h(x)$ est $\Delta_h=0$.
9) $h(x)=0$ n'admet pas de solution dans $\mathbb{R}$.
10) C_h est située au-dessus de l'axe des abscisses.

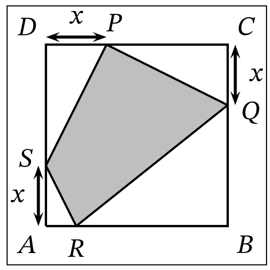
Exercice 53

A et B sont deux points distincts de la parabole $\mathcal{P}$ d'équation $y=x^2$ dans un repère orthonormé.
M est un point du segment $[AB]$ et N le point de $\mathcal{P}$ de même abscisse que M.
Existe-t-il une position du point M pour laquelle la distance MN est maximale ?
Notations : on notera a l'abscisse du point A, b l'abscisse du point B et x l'abscisse du point M.

MathGM

Exercice 54

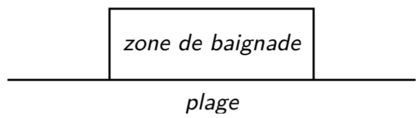
$ABCD$ est un carré de côté 6. P est un point du segment $[DC]$, Q un point du segment $[BC]$ et S un point du segment $[AD]$ tels que $DP=CQ=AS=x$ avec $x\in[0\,;6]$.
R est un point du segment $[AB]$ tel que $AR=1$.



1) Montrer que la somme des aires des triangles SDP et PCQ vaut $6x-x^2$.
2) Déterminer en fonction de x les aires des triangles SAR et RBQ.
3) Déduire des questions précédentes que l'aire du quadrilatère $PQRS$ vaut : $x^2-4x+21$.
   On note $f(x)$ cette aire.
   a) Résoudre $f(x)=18$
   b) Résoudre $f(x)>26$
   c) Pour quelle valeur de x l'aire du quadrilatère $PQRS$ est-elle minimale ? Justifier la réponse.

Exercice 55

Une zone de baignade rectangulaire est délimitée par une corde (agrémentée de bouées) de longueur 50 m. Quelles doivent être les dimensions de la zone pour que la surface soit maximale ?



Exercice 56

Trouver deux entiers dont la somme est égale à 40 et le produit à 375.

Ed. Magnard

Exercice 57

On souhaite résoudre l'équation de degré 4 :

$$2x^4+x^2-3=0.$$

1) On pose $X=x^2$. Quelle équation en X obtient-on ?
2) Résoudre l'équation obtenue. On note X_1 et X_2 ses solutions.
3) En résolvant $x^2=X_1$ puis $x^2=X_2$, déterminer les solutions de l'équation de départ.

(Correction)

Corrigé de l'exercice 1

1) $x^2 + 2x + 1$
2) $x^2 - 6x + 9$
3) $9x^2 - 24x + 16$
4) $25x^2 - 40x + 16$

Corrigé de l'exercice 2

1) $3x^2 + 6x + 8$
2) $-2x^2 + 16x - 34$
3) $-x^2 + 12x - 39$
4) $x^2 + 10x + 31$

Corrigé de l'exercice 3

1) $x^2 - 3x - 4$
2) $5x^2 - 35x$
3) $3x^2 - 6x - 24$
4) $-2x^2 + 32$

Corrigé de l'exercice 4

1) $(x-3)(x+3)$
2) $(x-9)(x-1)$
3) Pas factorisable
4) $-2x(2-2x)$

Corrigé de l'exercice 5

1) $S = \{-3; 3\}$
2) $S = \{-2; 2\}$
3) $S = \emptyset$
4) $S = \{-\sqrt{2}; \sqrt{2}\}$

Corrigé de l'exercice 6

$f(x) = (\sqrt{5} - 3x)(\sqrt{5} + 3x)$

Corrigé de l'exercice 7

1) Développez $(2x+6)(x-5)$.
2) Développez $f(x) = (2x+2)(x-3) - 24$.

Corrigé de l'exercice 8

1) $g(3) = -6$ et $g(-1) = 10$.
2) L'équation $g(x) = 3$ est équivalente à l'équation $x^2 - 6x = 0$. En factorisant $x^2 - 6x$ on se ramène à une équation produit nul.

Corrigé de l'exercice 9

$A = (2x-3)(3x+4) + (2x-3)(6x-1)$
On remarque que $(2x-3)$ est un facteur commun.
$A = (2x-3)(3x+4) + (2x-3)(6x-1)$
$A = (2x-3)(3x+4+6x-1)$
$A = (2x-3)(9x+3)$

$B = x(x+5) + 3(x+5)$ On remarque que $(x+5)$ est un facteur commun.
$= x(x+5) + 3(x+5)$
$= (x+5)(x+3)$

Corrigé de l'exercice 10

1) OUI
2) OUI
3) NON
4) OUI
5) OUI
6) OUI
7) NON
8) NON

Corrigé de l'exercice 11

1) On sait que si le polynôme, sous forme développée, s'écrit $P(x) = ax^2 + bx + c$, alors sa forme canonique est de la forme $P(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta$,
avec $\alpha = \dfrac{-b}{2a}$ et $\beta = P(\alpha)$.
Avec l'énoncé : $a = 3$ et $b = -30$, on en déduit que $\alpha = 5$.
On calcule alors $\beta = P(5)$, et on obtient au final que $\beta = 1$.
d'où, $P(x) = 3\left(x-5\right)^2 + 1$
Au final, $P(x) = 3(x-5)^2 + 1$

2) On sait que si le polynôme, sous forme développée, s'écrit $P(x) = ax^2 + bx + c$, alors sa forme canonique est de la forme $P(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta$,
avec $\alpha = \dfrac{-b}{2a}$ et $\beta = P(\alpha)$.
Avec l'énoncé : $a = 4$ et $b = -8$, on en déduit que $\alpha = 1$.
On calcule alors $\beta = P(1)$, et on obtient au final que $\beta = -5$.
d'où, $P(x) = 4\left(x-1\right)^2 + (-5)$
Au final, $P(x) = 4(x-1)^2 - 5$

Corrigé de l'exercice 12

$f(x) = -0,5(x+1)^2 + 3$

Corrigé de l'exercice 13

1) f admet un maximum car ...
2) Tableau de variations de f (à justifier) :

x	$-\infty$	$\frac{3}{2}$	$+\infty$
$f(x)$	↗	$\frac{7}{4}$	↘

Corrigé de l'exercice 14

1) Tableau de variations de f (à justifier) :

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$f(x)$	↘	-10	↗

2) f admet un minimum qui vaut ...

Corrigé de l'exercice 15

1) Minimum : 4, atteint en $x = 0$.
2) Maximum : 8, atteint en $x = 4$.
3) Maximum : 7, atteint en $x = 2$.
4) Minimum : -25, atteint en $x = -1$.

Corrigé de l'exercice 16

1) $A = -3x^2 + x$
$= x \times (-3)x + x \times 1$
$= x(-3x + 1)$

2) $B = -49x - 63x^2$
$= 7x \times (-7) - 7x \times 9x$
$= 7x(-7 - 9x)$

Corrigé de l'exercice 17

Corrigé en ligne.

Corrigé de l'exercice 18

Corrigé en ligne.

Corrigé de l'exercice 19

Corrigé en ligne.

Corrigé de l'exercice 20

1) $S = \{0; 5\}$
2) $S = \{-6; 6\}$
3) $S = \{-1\}$
4) $S = \left\{\frac{3}{2}\right\}$

Corrigé de l'exercice 21

1) $S = \left\{\frac{1}{3}\right\}$
2) $S = \{-1 - \sqrt{7}; -1 + \sqrt{7}\}$
3) $S = \{0; 3\}$
4) $S = \{-\sqrt{5}; \sqrt{5}\}$

Corrigé de l'exercice 22

Corrigé en ligne.

Corrigé de l'exercice 23

Corrigé en ligne.

Corrigé de l'exercice 24

1) Pas de racine.

2) Une seule racine : 4.

3) Deux racines : -7 et 5.

Corrigé de l'exercice 25

Corrigé en ligne.

Corrigé de l'exercice 26

1) $\Delta = 2^2 - 4 \times (-2) \times 4 = 36$
$\Delta > 0$ donc l'équation admet deux solutions : $x_1 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$
$x_1 = \dfrac{-2 - \sqrt{36}}{-4} = -1$
$x_2 = \dfrac{-2 + \sqrt{36}}{-4} = 2$
L'ensemble des solutions de cette équation est : $\mathcal{S} = \{-1; 2\}$.

2) $\Delta = (-20)^2 - 4 \times 5 \times 24 = -80$
$\Delta < 0$ donc l'équation n'admet pas de solution.
$\mathcal{S} = \varnothing$

Corrigé de l'exercice 27

1) On commence par mettre l'équation sous la forme réduite :

$$-x^2 - 2x - 1 = 0$$

On calcule le discriminant :

$$\Delta = (-2)^2 - 4 \times (-1) \times (-1) = 0.$$

On a $\Delta = 0$, donc l'équation a une solution donnée par

$$s = \frac{-(-2)}{2 \times (-1)}$$

Ainsi, $S = \{-1\}$.

2) On commence par mettre l'équation sous la forme réduite :

$$x^2 - x - 30 = 0$$

On calcule le discriminant :

$$\Delta = (-1)^2 - 4 \times 1 \times (-30) = 121.$$

On a $\Delta = 121$, donc l'équation a deux solutions. Les solutions sont

$$s_1 = \frac{-(-1) + \sqrt{121}}{2 \times 1} \quad s_2 = \frac{-(-1) - \sqrt{121}}{2 \times 1}$$

Ainsi, $S = \{-5; 6\}$.

3) On commence par mettre l'équation sous la forme réduite :

$$-6x^2 - 7x - 3 = 0$$

On calcule le discriminant :

$$\Delta = (-7)^2 - 4 \times (-6) \times (-3) = -23.$$

On a $\Delta = -23$, donc l'équation n'a pas de solution réelle, $S = \varnothing$.

Corrigé de l'exercice 28

La parabole a "les bras" tournés vers le haut, on en déduit que $a > 0$.
De plus, elle coupe l'axe des abscisses en deux points, donc f a deux racines et par suite $\Delta > 0$.

Corrigé de l'exercice 29

1)

x	$-\infty$		-2		3		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

2)

x	$-\infty$		$\frac{1}{3}$		$+\infty$
$g(x)$		$-$	0	$-$	

3)

x	$-\infty$		$+\infty$
$h(x)$		$+$	

Corrigé de l'exercice 30

1)

x	$-\infty$		-2		4		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

2)

x	$-\infty$		$-\frac{4}{3}$		$+\infty$
$g(x)$		$+$	0	$+$	

3)

x	$-\infty$		$+\infty$
$h(x)$		$+$	

Corrigé de l'exercice 31

1) $S =]-\infty; 0[\cup]2; +\infty[$

2) $S =]-\infty; -2,8[\cup]1,5; +\infty[$

3) $S = \varnothing$

Corrigé de l'exercice 32

1) Soit P le polynôme défini pour tout x de $\mathbb{R}$ par $P(x) = -x^2 - 4x + 5$.
On cherche à résoudre $P(x) \leq 0$.
Pour cela, on cherche ses racines éventuelles.
$\Delta = (-4)^2 - 4 \times (-1) \times 5 = 36$
$\Delta > 0$ donc le polynôme admet deux racines : $x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$.
$x_1 = \dfrac{4-\sqrt{36}}{-2} = -5$
$x_2 = \dfrac{4+\sqrt{36}}{-2} = 1$
On sait qu'un polynôme du second degré est du signe de a à l'extérieur de ses racines.
Comme $a = -1 < 0$:
On peut résumer le signe du polynôme dans un tableau de signes :

x	$-\infty$		-5		1		$+\infty$
$-x^2 - 4x + 5$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Finalement $S =]-\infty; -5] \cup [1; +\infty[$.

2) Soit P le polynôme défini pour tout x de $\mathbb{R}$ par $P(x) = -x^2 - 6x - 8$.
On cherche à résoudre $P(x) > 0$.
Pour cela, on cherche ses racines éventuelles.
$\Delta = (-6)^2 - 4 \times (-1) \times (-8) = 4$
$\Delta > 0$ donc le polynôme admet deux racines : $x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$.
$x_1 = \dfrac{6-\sqrt{4}}{-2} = -4$
$x_2 = \dfrac{6+\sqrt{4}}{-2} = -2$
On sait qu'un polynôme du second degré est du signe de a à l'extérieur de ses racines.
Comme $a = -1 < 0$
on en déduit le signe du polynôme dans un tableau de signes :

x	$-\infty$		-4		-2		$+\infty$
$-x^2 - 6x - 8$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Finalement $S =]-4; -2[$.

Corrigé de l'exercice 33

1)

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f(x)$		$-$	$\Vert$	$-$	

2)

x	$-\infty$		-3		-2		-1		$+\infty$
$g(x)$		$+$	$\Vert$	$+$	0	$-$	0	$+$	

Corrigé de l'exercice 34

1) $S = \left]-\dfrac{1}{2}; +\infty\right[$

2) $S =]-\infty; 0,2[\cup]0,2; 5[$

Corrigé de l'exercice 35

1) On reconnaît la forme développée d'une fonction polynôme du second degré $ax^2 + bx + c$ avec $a = -5$, $b = -35$ et $c = -7$.
Comme $a < 0$, la fonction est d'abord croissante puis décroissante.
Le changement de variation s'opère en $\alpha = -\dfrac{b}{2a} = \dfrac{-(-35)}{2 \times (-5)} = -\dfrac{7}{2}$.
De plus, $f\left(-\dfrac{7}{2}\right) = -5 \times \left(-\dfrac{7}{2}\right)^2 - 35 \times \left(-\dfrac{7}{2}\right) - 7 = \dfrac{217}{4}$.
On en déduit le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$:

x	$-\infty$		$-\frac{7}{2}$		$+\infty$
$f(x)$		$\nearrow$	$\frac{217}{4}$	$\searrow$	

2) On reconnaît la forme développée d'une fonction polynôme du second degré $ax^2 + bx + c$ avec $a = 5$, $b = -45$ et $c = -7$.
Comme $a > 0$, la fonction est d'abord décroissante puis croissante.
Le changement de variation s'opère en $\alpha = -\dfrac{b}{2a} = \dfrac{-(-45)}{2 \times 5} = \dfrac{9}{2}$.
De plus, $f\left(\dfrac{9}{2}\right) = 5 \times \left(\dfrac{9}{2}\right)^2 - 45 \times \dfrac{9}{2} - 7 = -\dfrac{433}{4}$.
On a $f(3) = 5 \times 3^2 - 45 \times 3 - 7 = -97$ et $f(7) = 5 \times 7^2 - 45 \times 7 - 7 = -77$.
On en déduit le tableau de variations de f sur $[3 ; 7]$:

x	3		$\frac{9}{2}$		7
$f(x)$	-97	$\searrow$	$-\frac{433}{4}$	$\nearrow$	-77

3) Le tableau de signes donne les racines de la fonction f : $x_1 = -4$ et $x_2 = 2$.
Le signe de a est donné par le signe dans le tableau à l'extérieur des racines.
On en déduit $a > 0$.
Ainsi, la fonction est d'abord décroissante puis croissante.
Le changement de variation s'opère en $\alpha = \dfrac{x_1 + x_2}{2}$ et l'extremum vaut $\beta = f(\alpha)$.
$\alpha = \dfrac{-4+2}{2} = -1$ et $f(-1) = -27$ (donné dans l'énoncé).
On en déduit le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$:

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$f(x)$	↘	-27	↗

4) On reconnaît la forme canonique d'une fonction polynôme du second degré $a(x-\alpha)^2 + \beta$, avec $a = -5$, $\alpha = \dfrac{3}{2}$ et $\beta = \dfrac{21}{4}$.
Comme $a < 0$, la fonction est d'abord croissante puis décroissante.
Le changement de variation s'opère en α et l'extremum vaut β.

On en déduit le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$:

x	$-\infty$	$\dfrac{3}{2}$	$+\infty$
$f(x)$	↗	$\dfrac{21}{4}$	↘

Corrigé de l'exercice 36

1) On développe l'expression donnée :
$$\begin{aligned} f(x) &= (x-10)^2 - 36 \\ &= \left(x^2 - 20x + 100\right) - 36 \\ &= x^2 - 20x + 64 \end{aligned}$$
On en déduit que $f(x)$ peut s'écrire $f(x) = x^2 - 20x + 64$.

2) On développe l'expression :
$$\begin{aligned} (x-4)(x-16) &= x^2 - 16x - 4x + 64 \\ &= x^2 - 20x + 64 \\ &= f(x) \end{aligned}$$
On retrouve la même forme développée que celle de la question précédente donc on a bien $f(x) = (x-4)(x-16)$.

3) **a.** Les coordonnées du point d'intersection entre l'axe des ordonnées et la courbe $\mathcal{C}_f$ sont $(0\,;\, f(0))$.
Pour déterminer $f(0)$, les calculs à partir de la forme développée sont plus rapides :
$f(0) = 0^2 - 20 \times 0 + 64 = 64$
On en déduit que les coordonnées du point d'intersection entre l'axe des ordonnées et la courbe $\mathcal{C}_f$ sont $(0\,;\, 64)$.

b. Les coordonnées des points d'intersection entre l'axe des abscisses et la courbe $\mathcal{C}_f$ sont de la forme $(x\,;\, 0)$. Pour trouver les abscisses, il faut donc résoudre l'équation $f(x) = 0$.
En utilisant la forme factorisée, cela revient à résoudre une équation produit-nul.
$$\begin{aligned} f(x) = 0 &\iff (x-4)(x-16) = 0 \\ &\iff x - 4 = 0 \quad \text{ou} \quad x - 16 = 0 \\ &\iff x = 4 \quad \text{ou} \quad x = 16 \end{aligned}$$
L'équation a deux solutions : 4 et 16.
On en déduit que les coordonnées des points d'intersection entre l'axe des abscisses et la courbe $\mathcal{C}_f$ sont $(4\,;\, 0)$ et $(16\,;\, 0)$

c. En traçant la courbe à l'aide de la calculatrice par exemple, on conjecture que le minimum de f est -36.
Pour le démontrer, on utilise la forme donnée dans la consigne.
Pour tout réel x,
$$\begin{aligned} &(x-10)^2 \geqslant 0 \\ \iff &(x-10)^2 - 36 \geqslant -36 \\ \iff &f(x) \geqslant -36 \end{aligned}$$
Comme $f(10) = (10-10)^2 - 36 = -36$ alors $f(x) \geqslant f(10)$.
On en déduit que le minimum de f est -36 et qu'il est atteint en $x = 10$.

d. Les coordonnées des points d'intersection entre $\mathcal{C}_f$ et la droite d'équation $y = 64$ sont de la forme $(x\,;\, 64)$.
Pour trouver les abscisses, il faut donc résoudre l'équation $f(x) = 64$.
On remarque que 64 est la constante de la forme développée.
On utilise donc la forme développée pour résoudre cette équation :
$$\begin{aligned} f(x) = 64 &\iff x^2 - 20x + 64 = 64 \\ &\iff x^2 - 20x = 0 \\ &\iff x(x-20) = 0 \\ &\iff x = 0 \quad \text{ou} \quad x - 20 = 0 \\ &\iff x = 0 \quad \text{ou} \quad x = 20 \end{aligned}$$
L'équation a deux solutions : 0 et 20.
On en déduit que $\mathcal{C}_f$ et la droite d'équation $y = 64$ ont deux points d'intersection :
$A(0\,;\, f(0))$ et $B(20\,;\, f(20))$, soit $A(0\,;\, 64)$ et $B(20\,;\, 64)$.

Corrigé de l'exercice 37

1) On développe la forme factorisée :
$$\begin{aligned} (x+4)(x-2) &= x^2 - 2x + 4x - 8 \\ &= x^2 + 2x - 8 \\ &= f(x) \end{aligned}$$
On retrouve la forme développée, donc on en déduit que $f(x)$ peut s'écrire sous forme factorisée : $f(x) = (x+4)(x-2)$.

2) On développe la forme canonique :
$$\begin{aligned} (x+1)^2 - 9 &= \left(x^2 + 2x + 1\right) - 9 \\ &= x^2 + 2x - 8 \end{aligned}$$
On en déduit que $f(x)$ s'écrit sous forme canonique : $f(x) = (x+1)^2 - 9$.

3) **a.** En utilisant la forme canonique, cela revient à résoudre une équation avec un carré isolé.

$$\begin{aligned} f(x) = -9 &\iff (x+1)^2 - 9 = -9 \\ &\iff (x+1)^2 = 0 \\ &\iff x+1 = 0 \\ &\iff x = -1 \end{aligned}$$

L'équation a une solution : -1.

b. En utilisant la forme factorisée, cela revient à résoudre une équation produit-nul.

$$\begin{aligned} f(x) = 0 &\iff (x+4)(x-2) = 0 \\ &\iff x+4 = 0 \quad \text{ou} \quad x-2 = 0 \\ &\iff x = -4 \quad \text{ou} \quad x = 2 \end{aligned}$$

L'équation a deux solutions : -4 et 2.

c. • Pour déterminer $f(0)$, les calculs à partir de la forme développée sont plus rapides :
$f(0) = 0^2 + 2 \times 0 + 2 - 8 = -8$
• Pour déterminer $f(-4)$, les calculs à partir de la forme factorisée sont plus rapides :
$f(-4) = (-4+4)(-4-2) = \times 0 \times (-6) = 0$
• Pour déterminer $f(-1)$, les calculs à partir de la forme canonique sont plus rapides :
$f(-1) = (-1+1)^2 - 9 = 0 - 9 = -9$

d. On remarque que -8 est la constante de la forme développée.
En utilisant la forme développée, on obtient :

$$\begin{aligned} f(x) = -8 &\iff x^2 + 2x - 8 = -8 \\ &\iff x^2 + 2x = 0 \\ &\iff x(x+2) = 0 \\ &\iff x = 0 \quad \text{ou} \quad x+2 = 0 \\ &\iff x = 0 \quad \text{ou} \quad x = -2 \end{aligned}$$

L'équation a deux solutions : 0 et -2.

Corrigé de l'exercice 38

1) On développe la forme factorisée :

$$\begin{aligned} -3(x-11)(x-1) &= -3\left(x^2 - x - 11x + 11\right) \\ &= -3x^2 + 3x + 33x - 33 \\ &= -3x^2 + 36x - 33 \\ &= f(x) \end{aligned}$$

On retrouve la forme développée, donc on en déduit que $f(x)$ peut s'écrire sous forme factorisée : $f(x) = -3(x-11)(x-1)$.

2) On développe la forme canonique :

$$\begin{aligned} -3(x-6)^2 + 75 &= -3\left(x^2 - 12x + 36\right) + 75 \\ &= -3x^2 + 36x - 108 + 75 \\ &= -3x^2 + 36x - 33 \end{aligned}$$

On en déduit que $f(x)$ s'écrit sous forme canonique : $f(x) = -3(x-6)^2 + 75$.

3) **a.** En utilisant la forme canonique, cela revient à résoudre une équation avec un carré isolé.

$$\begin{aligned} f(x) = 75 &\iff -3(x-6)^2 + 75 = 75 \\ &\iff -3(x-6)^2 = 0 \\ &\iff (x-6)^2 = 0 \\ &\iff x - 6 = 0 \\ &\iff x = 6 \end{aligned}$$

L'équation a une solution : 6.

b. En utilisant la forme factorisée, cela revient à résoudre une équation produit-nul.

$$\begin{aligned} f(x) = 0 &\iff -3(x-11)(x-1) = 0 \\ &\iff x - 11 = 0 \quad \text{ou} \quad x - 1 = 0 \\ &\iff x = 11 \quad \text{ou} \quad x = 1 \end{aligned}$$

L'équation a deux solutions : 11 et 1.

c. On remarque que -33 est la constante de la forme développée.
En utilisant la forme développée, on obtient :

$$\begin{aligned} f(x) = -33 &\iff -3x^2 + 36x - 33 = -33 \\ &\iff -3x^2 + 36x = 0 \\ &\iff x(-3x + 36) = 0 \\ &\iff x = 0 \quad \text{ou} \quad -3x + 36 = 0 \\ &\iff x = 0 \quad \text{ou} \quad x = 12 \end{aligned}$$

L'équation a deux solutions : 0 et 12.

d. • Pour déterminer $f(0)$, les calculs à partir de la forme développée sont plus rapides :
$f(0) = -3 \times 0^2 + 36 \times 0 - 33 = -33$
• Pour déterminer $f(1)$, les calculs à partir de la forme factorisée sont plus rapides :
$f(1) = -3(1-11)(1-1) = -3 \times 0 \times (-10) = 0$
• Pour déterminer $f(6)$, les calculs à partir de la forme canonique sont plus rapides :
$f(6) = -3(6-6)^2 + 75 = 0 + 75 = 75$

Corrigé de l'exercice 39

1) $S(1;4)$, $x = 1$

2) Racines : -1 et 3 et $f(0) = 3$.

3) Tableau de signes :

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Tableau de variations :

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f(x)$		$\nearrow$	4	$\searrow$	

4) $f(x) = -(x+1)(x-3)$ pour la forme factorisée et $f(x) = -x^2 + 2x + 3$ pour la forme factorisée.

Corrigé de l'exercice 40

1) Sur $]0;2[$.

2) Il faut résoudre l'inéquation $6x - 2x^2 > x^2$.

Corrigé de l'exercice 41

f_1 n'a pas de forme factorisé.
$f_2(x) = 0,75(x-1)^2$
$f_3(x) = 1,5(x-1)(x+1)$
$f_4(x) = -(x-2)(x+1)$

Corrigé de l'exercice 42

1) $S = \{-0,5\}$
2) $S = \{-10 - 10\sqrt{2}; -10 + 10\sqrt{2}\}$

Corrigé de l'exercice 43

1) $S = \{-7 + 4\sqrt{2}; -7 - 4\sqrt{2}\}$
2) $S = \{1 + \sqrt{2}; 1 - \sqrt{2}\}$
3) $S = \{-3; 1\}$
4) $S = \left\{\dfrac{-1+\sqrt{221}}{10}; \dfrac{-1-\sqrt{221}}{10}\right\}$

Corrigé de l'exercice 44

1) a) Le point M appartient à la droite d'équation $y = 2x+3$, donc ...
   b) On a bien $5x^2 + 6x + 5 = (x+0,6)^2 + 3,2$.
   c) f est décroissante sur $]-\infty; -0,6]$ et croissante sur $[-0,6; +\infty[$, elle admet donc un minimum en $x_0 = -0,6$.
   d) M_0 a pour abscisse $-0,6$. De plus $M_0 \in d$, donc l'ordonnée de M_0 est égale à 1,8 (faites le calcul).
2) a) Calculez $2x+3$ pour $x = 0$.
   b) Le triangle est rectangle (réciproque du théorème de Pythagore), les droites (AM_0) et d sont perpendiculaires.

Corrigé de l'exercice 45

1) a) 1400 €.
   b) 90 cartons.
2) $R(x) = 30x$
3) a) $B(x) = R(x) - f(x) = -0,25x^2 + 30x - 500$ (attention n'oubliez pas les parenthèses autour de $f(x)$).
   b) Développez $-0,25(x-100)(x-20)$.
4) Tableau de signes :

x	0		20		100		160
$f(x)$		+	0	−	0	+	

Tableau de variations :

x	0		60		160
$f(x)$	-500	↗	400	↘	-2100

5) Quel nombre de cartons doit vendre cet artisan si il veut réaliser un bénéfice positif ?
6) Quel est le nombre de cartons à vendre pour que son bénéfice soit maximal ? Calculer alors ce bénéfice.

Corrigé de l'exercice 46

1) Oui. Calculez y pour $x = 5$.
2) Résolvez l'équation $y = 0$. On trouve 12,07 m.
3) Résolvez l'inéquation $y \geqslant 1,02$. La balle a une hauteur supérieure ou égale à 1,02 m entre 1 m et 9 m du joueur.

Corrigé de l'exercice 47

Pour x compris entre 3,5 et 4.

Corrigé de l'exercice 48

L'abscisse du sommet est $-\dfrac{b}{2a}$. Son ordonnée est l'image de son abscisse. C'est parti !

Corrigé de l'exercice 49

1) $f(x) = x^2 - 2x + m$
2) $m = 8$
3) $m = 10$
4) $m = 1$

Corrigé de l'exercice 50

Donc l'équation admet une unique solution si $m = -8$; $m = 4$ ou $m = 8$.

Corrigé de l'exercice 51

1) $m = -1$, $m = 2$. La solution est 1.
2) a) Pour $m \in]-1; 2[$.
   b) Pour $m \in]-\infty; -1[$

Corrigé de l'exercice 52

1) VRAI
2) VRAI
3) FAUX
4) VRAI
5) FAUX
6) VRAI
7) FAUX
8) FAUX
9) VRAI
10) VRAI

Corrigé de l'exercice 53

Donnez les coordonnées de M en fonction de a et b (M est sur la droite (AB)). On trouve $M(x; (b+a)x - ab)$.
Les coordonnées de N sont $(x; x^2)$.
La distance MN est $(a+b)x - ab - x^2$. Il ne reste plus qu'à étudier cette fonction.

Corrigé de l'exercice 54

1) On calcule l'aire d'un triangle avec $\dfrac{\text{Base} \times \text{Hauteur}}{2}$.
2) M
3) L'aire du quadrilatère est égale à l'aire du carré moins la somme des aires des triangles.
   a) $S = \{1; 3\}$
   b) $S = [0; 5[$
   c) Pour $x = 2$.

Corrigé de l'exercice 55

Largeur : 12,5 m et longueur : 25 m.

Corrigé de l'exercice 56

15 et 25

Corrigé de l'exercice 57

$2X^2 + X - 3 = 0$ qui a pour solution $X_1 = 1$ et $X_2 = -1,5$.
Cela devrait aller pour la question 2).