Parcours d'exercices

Comportement d'une suite

10

ALGEBRE

Exercice 1

Pour chacun des cas ci-dessous, démontrer que la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n n'est pas monotone.

1) $u_n = n^2 - 2^n$

2) $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = (u_n - 1)^2 \end{cases}$

3) $u_n = (-0,3)^n$

Exercice 2

Étudier la monotonie de la suite u.

1) $u_n = n^2$

2) $u_n = \dfrac{n}{2}$

3) $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = u_n + 3n \end{cases}$

4) $u_n = 1 + \dfrac{1}{n}$

Exercice 3

Soit la suite arithmétique (u_n) de premier terme $u_0 = -3$ et de raison $r = -10$.
Étudier la monotonie de (u_n).

Exercice 4

Soit la suite arithmétique (u_n) de premier terme $u_0 = -5$ et de raison $r = \dfrac{1}{4}$.
Étudier la monotonie de (u_n).

Exercice 5

Soit la suite géométrique (v_n) de premier terme $v_0 = 2$ et de raison $q = 3$.
Étudier la monotonie de (v_n).

Exercice 6

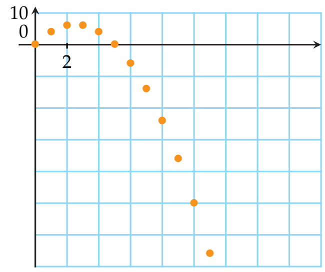
Soit la suite géométrique (v_n) de premier terme $v_0 = 4$ et de raison $q = 0,5$.
Étudier la monotonie de (v_n).

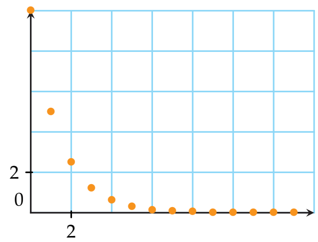
Exercice 7

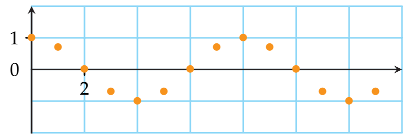
Soit la suite géométrique (v_n) de premier terme $v_0 = 5$ et de raison $q = -0,2$.
Étudier la monotonie de (v_n).

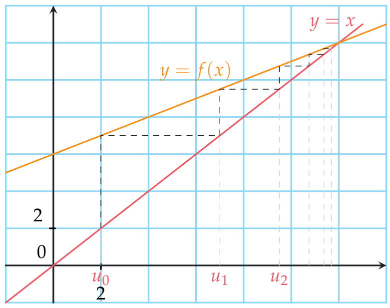
Exercice 8

1) Par lecture graphique, indiquer si la suite représentée semble monotone et conjecturer son éventuelle limite.









2) À l'aide d'une calculatrice, conjecturer la limite éventuelle des suites u.

a) définie pour $n > 1$ par $u_n = \dfrac{2n+1}{n-1}$

b) $u_0 = 4$ et $u_{n+1} = 2u_n$

c) $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = -\dfrac{1}{2}u_n$

d) définie pour $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = \dfrac{5n+1}{3n-2}$

Exercice 9

Étudier la monotonie des suites u et v définies, pour tout entier naturel n, par : $u_n = 4 - 2n$ et $v_n = 3n$.

Exercice 10

Étudier la monotonie de la suite u et v définies, pour tout entier naturel n, par $u_n = (0,2)^n$ et $v_n = \dfrac{1}{n+3}$.

Exercice 11

Étudier la monotonie de la suite u définie, pour tout entier naturel n, par $u_n = (-2)^n$.

Exercice 12

Étudier la monotonie de la suite u, pour tout entier naturel n, en déterminant le signe de $u_{n+1} - u_n$.

1) $\begin{cases} u_0 = -4 \\ u_{n+1} = u_n - 3 \end{cases}$

2) $u_n = 4^n$

3) $\begin{cases} u_0 = -2 \\ u_{n+1} = u_n - \dfrac{1}{(n+1)^2} \end{cases}$

Exercice 13

Étudier la monotonie de la suite u, pour tout entier naturel n, en déterminant le signe de $u_{n+1} - u_n$.

1) $u_n = n^2 + 2n$

2) $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \left(u_n + \dfrac{1}{2}\right)^2 \end{cases}$

3) $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = 3n + u_n \end{cases}$

Exercice 14

Étudier la monotonie de la suite u en déterminant une fonction f définie sur un intervalle de type $[a\ ;\ +\infty[$ avec $a > 0$ telle que $u_n = f(n)$ dont on étudiera les variations.

1) $u_n = 4n - 7$

2) $u_n = \sqrt{n}$

3) $u_n = n^2 - 4n + 5$

4) $u_n = \dfrac{1}{4n}$

Exercice 15

Étudier la monotonie de la suite u en déterminant une fonction f définie sur un intervalle de type $[a\ ;\ +\infty[$ avec $a > 0$ telle que $u_n = f(n)$ dont on étudiera les variations.

1) $u_n = n^2 - 13n + 36$

2) $u_n = \dfrac{n+2}{3n+2}$

Exercice 16

Pour chacun des cas ci-dessous, démontrer que la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n n'est pas monotone.

1) $u_n = 3n^2 - 3^n$

2) $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = (u_n - 1)^2 \end{cases}$

3) $u_n = \left(-\dfrac{1}{2}\right)^n$

Exercice 17

Pour chacun des cas ci-dessous, déterminer le sens de variation de la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par deux méthodes différentes.

1) $u_n = \sqrt{n} + 2$

2) $u_n = \dfrac{1}{n+1}$

3) $u_n = 3n^2 + n$

Exercice 18

Étudier la monotonie de la suite u en choisissant une méthode adaptée.

1) $u_n = 3n^2$

2) $u_n = \dfrac{2n+5}{n+1}$

3) $u_n = \sqrt{n+1}$

4) $u_n = \dfrac{0,5^n}{n}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 19

Étudier la monotonie de la suite u en choisissant une méthode adaptée.

1) $u_n = n - n^2$

2) $u_n = 1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \ldots + \dfrac{1}{n}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$

3) $u_n = 3n \times \left(\dfrac{1}{3}\right)^n$ pour $n \in \mathbb{N}^*$

Exercice 20

Étudier la monotonie de la suite u en choisissant une méthode adaptée.

1) $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = (u_n + 1)^2 \end{cases}$

2) $u_n = \dfrac{2^{2n+2}}{3^n}$

Exercice 21

Étudier la monotonie de la suite u en choisissant une méthode adaptée.

1) $u_n = \dfrac{\sqrt{n}}{2^n}$

2) $u_n = \dfrac{1}{n+1} - \dfrac{1}{n}$

Exercice 22

Soit la suite (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par $u_n = 1 \times 2 \times \ldots \times n$.

Étudier la monotonie de la suite (u_n).

Remarque : $u_n = n!$ et on appelle ce nombre «factorielle n».

Exercice 23

Le plutonium 239 est un élément radioactif.

On sait que la quantité de plutonium 239 diminue de 0,003 % tous les ans.

On s'intéresse à un déchet radioactif contenant 1 g de plutonium 239 l'année $t = 0$ et on note t le nombre d'années écoulées à partir de ce moment.

On note m_t la masse de plutonium 239, exprimée en gramme, présente dans le déchet à l'instant t.

1) Écrire m_{t+1} en fonction de m_t.
2) Étudier la nature de la suite (m_t) puis écrire m_t en fonction de t.
3) Étudier le sens de variations de la suite (m_t).
4) Déterminer, à l'aide d'un tableur, le nombre d'années nécessaires pour diminuer de moitié la masse de plutonium 239 dans ce déchet.

Cette durée s'appelle demi-vie radioactive du plutonium 239.

Exercice 24

Soit la suite arithmétique (u_n) de premier terme $u_0 = \dfrac{1}{3}$ et de raison $r = 0,4$.
Étudier la monotonie de (u_n).

Exercice 25

Soit la suite arithmétique (u_n) de premier terme $u_0 = 10$ et de raison $r = -2$.
Étudier la monotonie de (u_n).

Exercice 26

Soit la suite arithmétique (u_n) de premier terme $u_0 = -2$ et de raison $r = -2$.
Étudier la monotonie de (u_n).

Exercice 27

Soit la suite arithmétique (u_n) de premier terme $u_0 = -5$ et de raison $r = \dfrac{1}{4}$.
Étudier la monotonie de (u_n).

Exercice 28

Soit la suite géométrique (v_n) de premier terme $v_0 = -5$ et de raison $q = \dfrac{1}{4}$.
Étudier la monotonie de (v_n).

Exercice 29

Soit la suite géométrique (v_n) de premier terme $v_0 = \dfrac{1}{5}$ et de raison $q = 6$.
Étudier la monotonie de (v_n).

Exercice 30

Soit la suite géométrique (v_n) de premier terme $v_0 = 5$ et de raison $q = -\dfrac{1}{5}$.
Étudier la monotonie de (v_n).

Exercice 31

Soit la suite géométrique (v_n) de premier terme $v_0 = -\dfrac{1}{2}$ et de raison $q = -\dfrac{1}{2}$.
Étudier la monotonie de (v_n).

Exercice 32

Soit la suite arithmétique (u_n) de raison r telle que $u_4 = \dfrac{1}{4}$ et $u_5 = \dfrac{1}{6}$.
Étudier la monotonie de (u_n).

Exercice 33

Soit la suite géométrique (v_n) de raison $q \in \mathbb{R}$ telle que $-1 < q < 0$ et de premier terme $v_1 = 3$.
Étudier la monotonie de (v_n).

Exercice 34

À l'aide d'une calculatrice, conjecturer la limite éventuelle des suites u.

1) définie pour $n > 1$ par $u_n = \dfrac{2n+1}{n-1}$
2) définie pour $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = \dfrac{2n+1}{n^2+4}$
3) définie pour $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = \dfrac{2n^2-1}{n+1}$
4) définie pour $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = \dfrac{5n+1}{3n-2}$

Exercice 35

À l'aide d'une calculatrice, conjecturer la limite éventuelle des suites u définie pour $n \in \mathbb{N}$.

1) $u_0 = 4$ et $u_{n+1} = 2u_n$
2) $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = -\dfrac{1}{2}u_n$
3) $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \dfrac{5}{u_n}$

Exercice 36

1) À l'aide d'une calculatrice, conjecturer la limite éventuelle des suites u définie pour $n \in \mathbb{N}$.
   a) $u_n = (-4)^n$
   b) $u_n = 3^n$
   c) $u_n = 0,6^n$
   d) $u_n = (-0,4)^n$
   e) $u_n = 1^n$
   f) $u_n = (-1)^n$
2) De façon générale, émettre une conjecture portant sur la limite de (q^n) avec $q \in \mathbb{R}$ selon les valeurs de q.

Exercice 37

Des parents déposent 40 euros à la banque à la naissance de leur fils et ils décident qu'ils déposeront une fois par an de l'argent, en mettant chaque année 10 euros de plus que l'année précédente.

1) Quel sera le montant du dépôt la deuxième année ? la dixième année ?
2) Quelle somme y aura-t-il au total pour les 18 ans de leur fils ?

Exercice 38

Soit (u_n) la suite définie pour tout entier n par $u_{n+1} = 2u_n + 5$ et $u_0 = 1$.

1) Calculer u_1, u_2 et u_3.
2) Montrer que (u_n) n'est ni arithmétique, ni géométrique.
3) On pose $v_n = u_n + 5$ pour tout entier naturel n.
   Montrer que (v_n) est une suite géométrique. Donner sa raison et son premier terme.
4) Exprimer v_n en fonction de n.
5) En déduire (u_n) en fonction de n.

Exercice 39

Soit (u_n) la suite définie pour tout entier n par $u_{n+1} = -3u_n + 8$ et $u_0 = 6$.

1) Calculer u_1, u_2 et u_3.
2) On pose $v_n = u_n - 2$ pour tout entier naturel n. Montrer que (v_n) est une suite géométrique. Donner sa raison et son premier terme.
3) Exprimer v_n en fonction de n.
4) En déduire (u_n) en fonction de n.

Exercice 40

Soit (u_n) la suite définie pour tout entier n par
$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = 3u_n - 2n + 1. \end{cases}$$
On admet que, pour tout entier n, $u_n \neq 0$.

1) Calculer u_1, u_2 et u_3.
2) La suite (u_n) est-elle arithmétique ? est-elle géométrique ?
3) On pose $v_n = u_n - n$ pour tout entier naturel n. Montrer que (v_n) est une suite géométrique. Donner sa raison et son premier terme.
4) Exprimer v_n en fonction de n.
5) En déduire (u_n) en fonction de n.

Exercice 41

Soit (u_n) la suite définie pour tout entier n par
$$\begin{cases} u_0 = 5 \\ u_{n+1} = \dfrac{10u_n}{10 + u_n}. \end{cases}$$
On admet que, pour tout entier n, $u_n > 0$.

1) Calculer u_1, u_2 et u_3.
2) On pose $v_n = \dfrac{5}{u_n}$ pour tout entier naturel n. Montrer que (v_n) est une suite arithmétique. Donner sa raison et son premier terme.
3) Exprimer v_n en fonction de n.
4) En déduire l'expression du terme général de (u_n) en fonction de n.

Exercice 42

En raison de l'évaporation, une piscine perd chaque semaine 3 % de son volume d'eau.
On remplit ce bassin avec 90 m^3 d'eau et, pour compenser la perte due à l'évaporation, on décide de rajouter chaque semaine $2,4$ m^3 d'eau dans le bassin.
On note u_n le nombre de m^3 d'eau contenu dans ce bassin au bout de n semaines.
On a donc $u_0 = 90$ et, pour tout entier n,
$$u_{n+1} = 0,97 \times u_n + 2,4$$

1) On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par $v_n = u_n - 80$.
   a) Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.
   b) Exprimer v_n en fonction de n. En déduire que pour tout entier naturel n, $u_n = 80 + 10 \times 0,97^n$.
2) Étudier la monotonie de la suite u_n.
3) Déterminer la limite de la suite (u_n). Interpréter ce résultat.

Exercice 43

En 2014, la population d'une ville était de 40 000 habitants. Une étude portant sur l'évolution démographique, a permis d'établir que chaque année, 8 % des habitants quittent la ville et 4 000 nouvelles personnes emménagent.
On note u_n le nombre de milliers d'habitants de cette ville l'année $2014 + n$; on a donc $u_0 = 40$.

1) Selon ce modèle, à combien peut-on évaluer la population de cette ville en 2015 ?
2) Justifier que pour tout entier naturel n,
$$u_{n+1} = 0,92 \times u_n + 4$$
3) On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par $v_n = u_n - 50$.
   a) Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.
   b) Exprimer v_n en fonction de n. En déduire que pour tout entier naturel n, $u_n = 50 - 10 \times 0,92^n$.
4) Étudier la monotonie de la suite u_n.
5) Déterminer la limite de la suite (u_n). Interpréter ce résultat.