Chapitre 4

Dérivation (acte 1)

Les savoir-faire

210. Calculer un nombre dérivé.
211. Interpréter géométriquement un nombre dérivé.
212. Déterminer l'équation réduite d'une tangente.
213. Connaître les fonctions dérivées des fonctions usuelles.
214. Calculer la fonction dérivée d'une fonction.

I. Nombre dérivé - Tangente

1. Taux de variation

Définition : taux de variation

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et a un réel appartenant à I. Soit h un réel non nul tel que $a+h \in I$.
Le taux d'accroissement de f entre a et $a+h$ est le rapport $t(h)$ défini par :

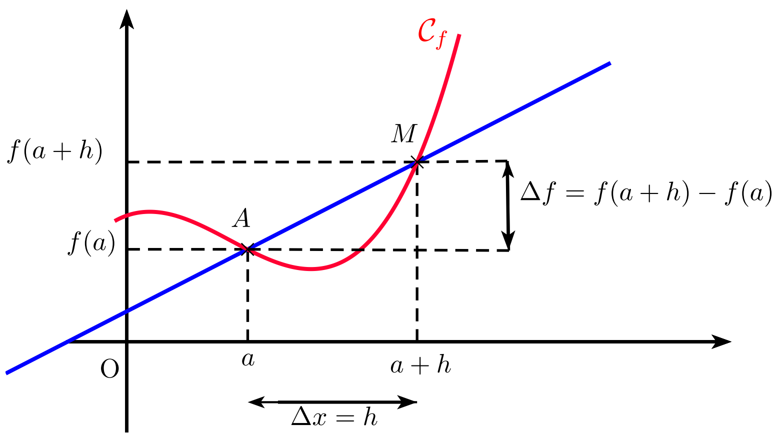
$$t(h) = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Remarque :
Si a et b sont deux réels distincts de l'intervalle I, le taux de variation de f entre a et b est le nombre $\dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

Interprétation graphique

A et M sont des points de $\mathcal{C}_f$ d'abscisses respectives a et $a+h$. Le taux d'accroissement de f entre a et $a+h$ est le coefficient directeur de la droite (AM) :

$$\frac{y_M - y_A}{x_M - x_A} = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$



2. Nombre dérivé

Définition : nombre dérivé

On dit que f est **dérivable** en a lorsque le taux d'accroissement $t(h)$ admet comme limite un nombre réel quand h tend vers 0. Ce nombre, noté $f'(a)$ est appelé **nombre dérivé de f** en a.
On a ainsi :

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = f'(a)$$

Exemple :
1. Démontrer que la fonction f définie par $f(x) = x^2 - 3x + 1$ est dérivable en $x = 2$. Calculer le nombre dérivé en 2. Vidéo1

2. Soit f la fonction définie sur $]-\infty\ ;\ -2[\cup]-2\ ;\ +\infty[$ par :

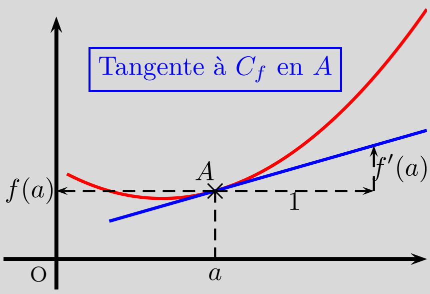
$$f(x) = \frac{1}{x+2}$$

Calculer le nombre dérivé de f en $x = 1$. Vidéo2

3. Tangente

Définition : tangente en un point

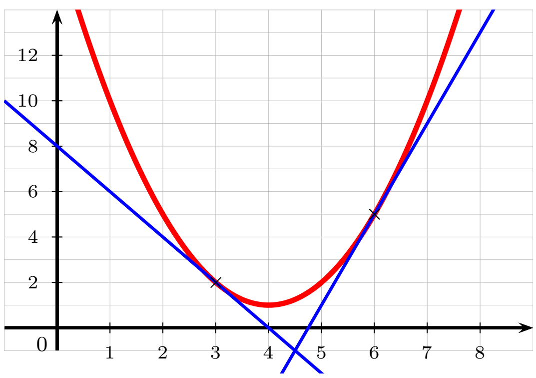
Soit f une fonction dérivable en a, $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative et A le point de $\mathcal{C}_f$ d'abscisse a.
La tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point A est la droite passant par le point A dont le coefficient directeur est $f'(a)$.



Propriété : équation d'une tangente

Soit f une fonction définie et dérivable en a et $\mathcal{C}$ sa courbe représentative. Alors $\mathcal{C}$ admet en son point d'abscisse a une tangente T d'équation :$y = f'(a)(x-a) + f(a)$

Exemples :
Déterminer graphiquement le nombre dérivé et une équation de la tangente en $x = 3$ et $x = 6$. Vidéo



II. Fonctions dérivées

Définition : fonction dérivable

• On dit que f est dérivable sur un intervalle I lorsqu'elle est dérivable pour tout réel a de I.
• La fonction qui, à tout réel x de I, associe le nombre dérivé $f'(x)$ est appelée **fonction dérivée** de f. On la note f'.

Dérivées de fonctions usuelles :

$f(x) =$	Dérivable sur $I =$	$f'(x) =$
k (constante)	$\mathbb{R}$	0
$mx+p$	$\mathbb{R}$	m
x^2	$\mathbb{R}$	$2x$
x^n $(n \in \mathbb{N}^*)$	$\mathbb{R}$	nx^{n-1}
$\dfrac{1}{x}$	$]-\infty;0[$ et $]0;+\infty[$	$-\dfrac{1}{x^2}$
$\sqrt{x}$	$]0;+\infty[$	$\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$
$\lvert x\rvert$	$]-\infty;0[$ et $]0;+\infty[$	$\begin{cases} -1 \text{ si } x \in]-\infty;0[\\ 1 \text{ si } x \in]0;+\infty[\end{cases}$

III. Dérivées et opérations

1. Somme et produit

Propriété : dérivées de la somme et du produit

Soient u et v deux fonctions définies et dérivables sur I et $k \in \mathbb{R}$. Alors :
• La fonction $u+v$ est dérivable sur I et on a :
$$(u+v)' = u' + v'.$$
• La fonction ku est dérivable sur I et on a : $(ku)' = ku'$.
• La fonction uv est dérivable sur I et on a : $(uv)' = u'v + uv'$.

Exemple :

1. Déterminer la fonction dérivée de la fonction f définie par : $f(x) = 3x^2 - 2\sqrt{x}$. Vidéo1
2. Déterminer la fonction dérivée de la fonction f définie par : $f(x) = 3x^3 + 2x^2 - 4x + 7$. Vidéo2
3. Déterminer la fonction dérivée de la fonction f définie par : $f(x) = (x+1)(3-2x^2)$. Vidéo3

2. Inverse et quotient

Propriété : dérivées de l'inverse et du quotient

Soient u et v deux fonctions définies et dérivables sur I telles que v ne s'annule pas sur I. Alors :
• La fonction $\dfrac{1}{v}$ est dérivable sur I et on a :
$$\left(\frac{1}{v}\right)' = -\frac{v'}{v^2}.$$
• La fonction $\dfrac{u}{v}$ est dérivable sur I et on a : $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$.

Exemples :

1. Déterminer la fonction dérivée de la fonction f définie par : $f(x) = \dfrac{1}{3x^4+1}$. Vidéo1
2. Déterminer la fonction dérivée de la fonction f définie par : $f(x) = \dfrac{1-x^2}{3x-4}$. Vidéo2

3. Dérivée de $x \longmapsto g(mx+p)$

Propriété : dérivée de $x \longmapsto g(mx+p)$

Si g est une fonction dérivable sur un intervalle I et si J est un intervalle tel que pour tout x de J, $mx+p$ appartient à I, alors la fonction f définie par $f(x) = g(mx+p)$ est dérivable sur J et $f'(x) = m \times g'(mx+p)$.

Exemple :

Calculer la dérivée de la fonction g définie par : $g(x) = \dfrac{1}{5x-4}$. Vidéo