Chapitre 3

Fonctions trigonométriques

Les savoir-faire

220. Placer un point sur le cercle trigonométrique.

221. Déterminer sur le cercle trigonométrique, pour des valeurs remarquables de x, les cosinus et sinus d'angles associés à x.

222. Traduire graphiquement la parité et la périodicité des fonctions trigonométriques.

223. Lier la représentation graphique des fonctions sinus et cosinus au cercle trigonométrique.

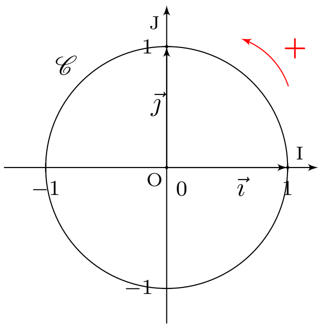
I. Repérage sur le cercle trigonométrique. Radian

1. Cercle trigonométrique

Définition : cercle trigonométrique

Dans un repère orthonormé $(O~;~\vec{\imath}\,,\vec{\jmath}\,)$, le cercle $\mathscr{C}$ de centre O et de rayon 1 est appelé cercle trigonométrique.

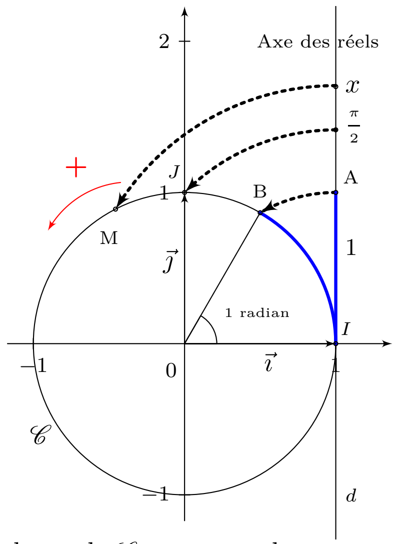
- le sens direct ou trigonométrique est le sens contraire des aiguilles d'une montre ;
- le sens indirect ou anti-trigonométrique est le sens horaire.



2. Enroulement de la droite des réels

Par enroulement de la droite numérique autour du cercle trigonométrique, on peut associer à tout réel un unique point du cercle. M est le point-image de x sur le cercle $\mathscr{C}$. On note $M(x)$.

Réciproquement, à tout point M du cercle trigonométrique correspondent une infinité de valeurs.
Si x est une de ces valeurs, les autres sont de la forme $x + 2\pi$, $x + 4\pi$, $x - 2\pi$, ...



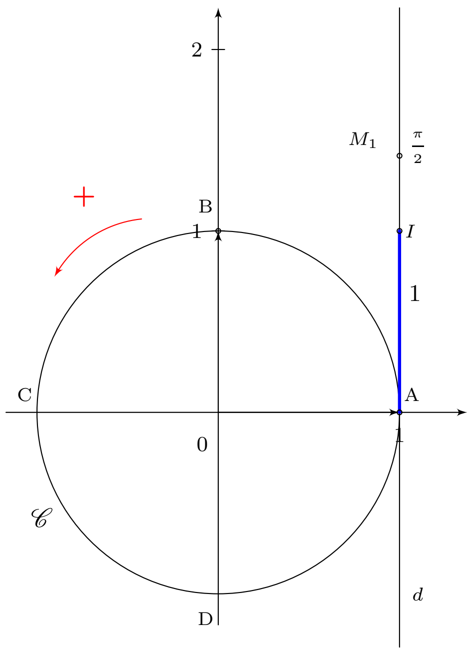
On définit 1 radian comme la mesure de l'angle qui intercepte le cercle $\mathscr{C}$ en un arc de mesure 1.
L'angle $\widehat{\text{IOB}}$ a pour mesure 1 radian. La longueur de l'arc $\overset{\frown}{\text{IB}}$ est égale à 1 et l'angle $\widehat{\text{IOM}}$ a pour mesure x radians.

Exemples :

a. On enroule la droite orientée des réels sur le cercle trigonométrique. Placer le point P associé à $\dfrac{\pi}{2}$ et le point R associé à $\dfrac{9\pi}{4}$. Vidéo

b. On considère la figure suivante, où $\mathscr{C}$ est le cercle trigonométrique et la droite d, tangente à $\mathscr{C}$ en A, est munie du repère (A, I). Vidéo

Reproduire la figure, puis indiquer en quels points de cercle $\mathscr{C}$ se retrouvent après enroulement les points de la droite d suivant :
$M_1\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$; $M_2\left(\dfrac{3\pi}{2}\right)$;
$M_3\left(-\dfrac{\pi}{2}\right)$;$M_4\left(5\pi\right)$;
$M_5\left(-\dfrac{3\pi}{4}\right)$; $M_6\left(\dfrac{5\pi}{4}\right)$;
$M_7\left(\dfrac{-13\pi}{4}\right)$.



3. Conversion radians - degrés

Les mesures en radians sont proportionnelles aux mesures en degrés. D'où le tableau de proportionnalité :

mesures en degrés : *d*	$0°$	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$	$180°$	$360°$	$\simeq 57°$
mesure en radians : α	0	$\dfrac{\pi}{6}$	$\dfrac{\pi}{4}$	$\dfrac{\pi}{3}$	$\dfrac{\pi}{2}$	π	2π	1

Si α est la mesure de l'angle en radians et d celle en degrés, on a la relation : $180 \times \alpha = \pi \times d$.

Exemples :

1. Donner la mesure en radians d'un angle de 33°.

2. Donner la mesure en degré d'un angle de $\frac{3\pi}{8}$ rad. Vidéo

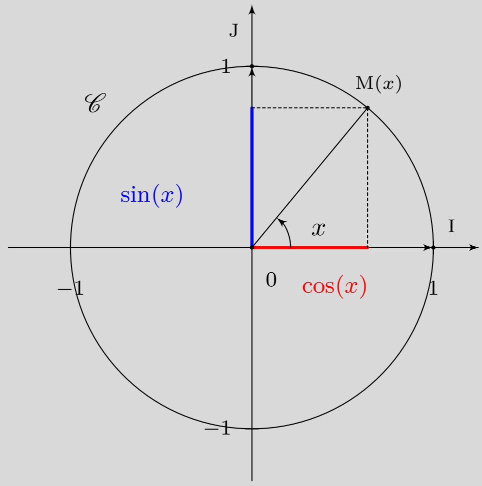
II. Cosinus et sinus d'un nombre réel

1. Définitions et propriétés

Définitions : cosinus et sinus d'un nombre réel

Soit x un réel et M son image sur le cercle trigonométrique :

- Le **cosinus de x**, noté $\cos(x)$, est **l'abscisse** du point M ;
- Le **sinus de x**, noté $\sin(x)$, est **l'ordonnée** du point M.



Propriétés

Pour tout réel x et $k \in \mathbb{Z}$:

- $-1 \leqslant \sin(x) \leqslant 1$ et $-1 \leqslant \cos(x) \leqslant 1$;
- $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$;
- $\cos(x + 2k\pi) = \cos(x)$ et $\sin(x + 2k\pi) = \sin(x)$.

2. Cosinus et sinus des angles remarquables

x	$\cos(x)$	$\sin(x)$
0	1	0
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
$\frac{\pi}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\frac{\pi}{2}$	0	1
π	-1	0

Explications et exemples :

1. Lire sur le cercle trigonométrique. Vidéo

2. Calculer la valeur exacte de $\cos\frac{5\pi}{6}$ et $\sin\frac{4\pi}{3}$. Vidéo

III. La fonction cosinus

1. Définition et propriétés

Définition

La fonction cosinus, notée cos, est la fonction qui à tout $x \in \mathbb{R}$ associe le réel $\cos(x)$.

Propriétés

La fonction cos est :

— paire : pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\cos(-x) = \cos(x)$. Sa courbe représentative est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

— 2π-périodique : pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\cos(x + 2\pi) = \cos(x)$ Sa courbe représentative est invariante par translation de vecteur $2\pi\vec{\imath}$.

Variations :

On déduit les variations de la fonction cos sur $\mathbb{R}$ de ses variations sur $[0 \; ; \; \pi]$. En effet, elle est 2π-périodiques et elle est paire.

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π
$\cos(x)$	1	0	-1

IV. La fonction sinus

Définition et propriétés

La fonction sinus, notée sin, est la fonction qui à tout $x \in \mathbb{R}$ associe le réel $\sin(x)$.

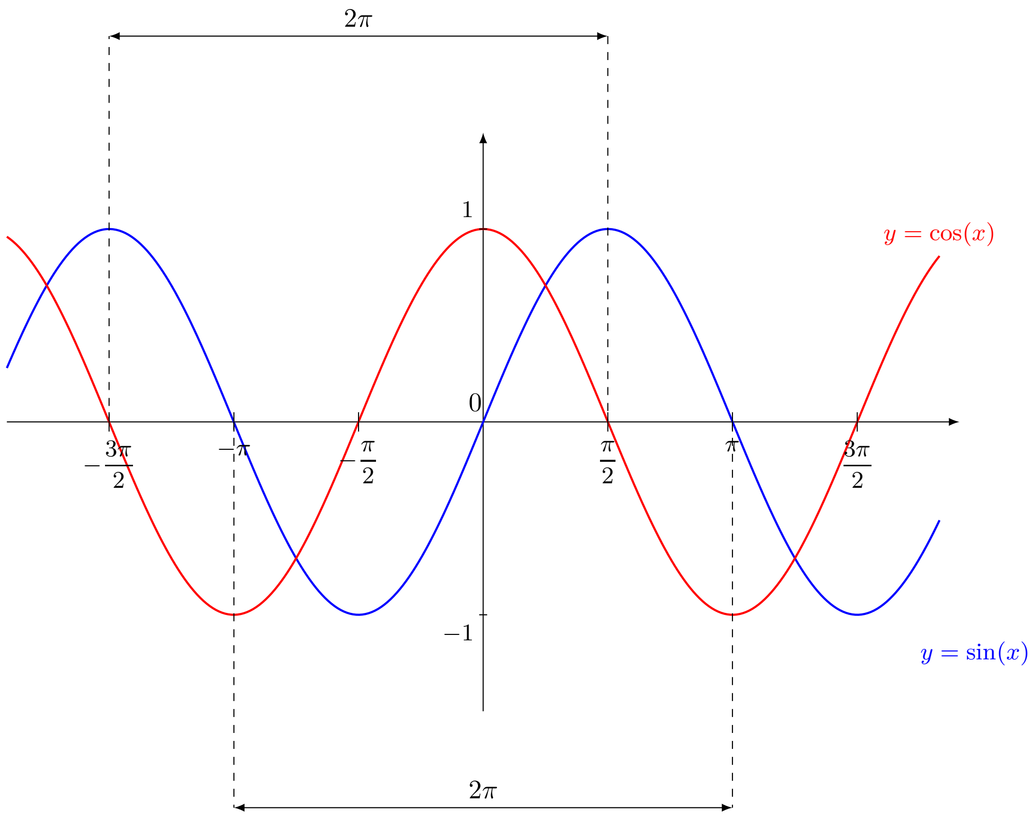
Propriétés

La fonction sin est :
- impaire : pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\sin(-x) = -\sin(x)$. Sa courbe représentative est symétrique par rapport à l'origine du repère ;
- 2π-périodique : pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\sin(x + 2\pi) = \sin(x)$. Sa courbe représentative est invariante par translation de vecteur $2\pi\vec{\imath}$.

Variations :
On déduit les variations de la fonction sin sur $\mathbb{R}$ de ses variations sur $[0 ; \pi]$. En effet, elle est 2π-périodiques et elle est impaire.

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π
$\sin(x)$	0 ↗	1	↘ 0

V. Les représentations graphiques



VI. Etude d'une fonction trigonométrique

Exemple :
Démontrer que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \sin(x) - \sin(2x)$ est impaire. Vidéo

Exemple :
On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \cos(2x) - \frac{1}{2}$$

Etudier la parité de f. Vidéo
Démontrer que f est périodique de période π. Vidéo

Représenter graphiquement la fonction f. Vidéo