Chapitre 5

Probabilités conditionnelles et indépendance

Les savoir-faire

410. Passer du registre de la langue naturelle au registre symbolique et inversement.

411. Distinguer $P_A(B)$ et $P_B(A)$.

412. Construire et utiliser un arbre pondéré ou un tableau en lien avec une situation donnée.

413. Utiliser la formule des probabilités totales.

414. Démontrer et utiliser l'indépendance de deux événements.

415. Représenter et utiliser une répétition de deux épreuves indépendantes par un arbre ou un tableau.

I. Conditionnement par un évènement

1. Probabilité conditionnelle

Définition : probabilité conditionnelle

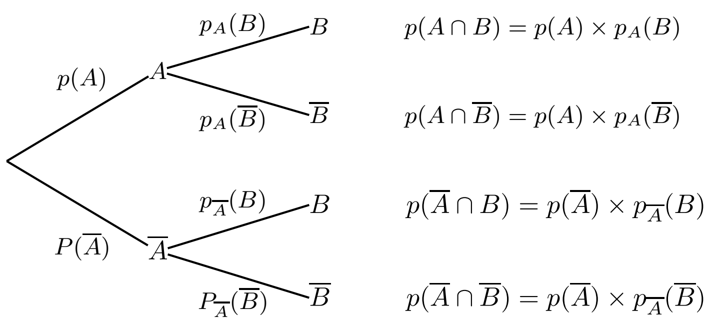
On considère un univers Ω et A un événement de Ω tel que $P(A) \neq 0$.
On définit sur Ω une nouvelle probabilité, notée P_A, et pour tout événement B, on appelle **probabilité de B sachant A** et on note $P_A(B)$, le quotient :

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

Exemple :
On tire une carte au hasard dans un jeu de 32 cartes.
A : « le résultat est un pique ».
B : « le résultat est un roi ».
Calculer $P_A(B)$ et $P_B(A)$. Vidéo

2. Arbre pondéré

Une expérience aléatoire peut être schématisée par un arbre pondéré dont chaque branche est affecté d'un poids qui est une probabilité.



La somme des probabilités affectées aux branches issues d'un même nœud est égale à 1 ;

La probabilité d'une intersection est le produit des probabilités affectées aux branches qui mènent à sa feuille.

Exemple :
Un sac contient 50 boules : 20 rouges et 30 noires.
15 boules rouges sont marquées GAGNE !
9 boules noires sont marquées GAGNE !
On tire au hasard une boule dans le sac.
Construire un arbre de probabilité. Vidéo

II. Formule des probabilités totales

1. Cas de deux événements

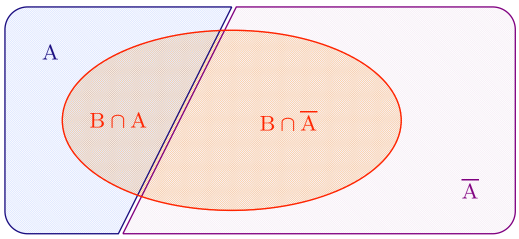
Propriété : probabilité totale avec deux événements

Si A est un évènement de Ω tel que $P(\mathrm{A}) \neq 0$ et $P(\mathrm{A}) \neq 1$, alors pour tout évènement B de Ω

$$P(\mathrm{B}) = P(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) + P(\overline{\mathrm{A}} \cap \mathrm{B}) = P_{\mathrm{A}}(\mathrm{B}) \times P(\mathrm{A}) + P_{\overline{\mathrm{A}}}(\mathrm{B}) \times P(\overline{\mathrm{A}}).$$

Les évènements $\mathrm{A} \cap \mathrm{B}$ et $\overline{\mathrm{A}} \cap \mathrm{B}$ sont incompatibles et
$\mathrm{B} = (\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) \cup \left(\overline{\mathrm{A}} \cap \mathrm{B}\right)$ d'où :

$$P(\mathrm{B}) = p\,(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) + P(\overline{\mathrm{A}} \cap \mathrm{B})$$



2. Partition

Propriété : partition

n événements A_1, A_2, $\ldots$,A_n forment une partition de Ω lorsque :

- ils sont tous de probabilité non nulle ;
- ils sont incompatibles deux à deux : pour tout i et j de $\{1; \ldots; n\}$, $\mathrm{A}_i \cap \mathrm{A}_j = \varnothing$;
- leur réunion est Ω : $\mathrm{A}_1 \cup \mathrm{A}_2 \cup \ldots \cup \mathrm{A}_n = \Omega$

Remarques :

— Un évènement A de probabilité non nulle et son évènement contraire $\overline{\mathrm{A}}$ forment une partition de Ω.

— Si les évènements A_1, A_2, $\cdots$, A_n forment une partition de Ω alors :

$$\sum_{i=1}^{n} P(\mathrm{A}_i) = P\,(\mathrm{A}_1) + P\,(\mathrm{A}_2) + \cdots + P\,(\mathrm{A}_n) = 1$$

3. Formule des probabilités totales

Théorème : formule des probabilités totales

Soit n un entier supérieur ou égal à 2.
Si $\{\mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2, \ldots, \mathrm{A}_n\}$ est une partition de Ω alors pour tout évènement B de Ω :

$$\begin{aligned} P(\mathrm{B}) &= P(\mathrm{A}_1 \cap \mathrm{B}) + P(\mathrm{A}_2 \cap \mathrm{B}) + \ldots + P(\mathrm{A}_n \cap \mathrm{B}) \\ &= P(\mathrm{A}_1) \times P_{\mathrm{A}_1}(\mathrm{B}) + P(\mathrm{A}_2) \times P_{\mathrm{A}_2}(\mathrm{B}) + \ldots + P(\mathrm{A}_n) \times P_{\mathrm{A}_n}(\mathrm{B}) \end{aligned}$$

Exemple :
On effectue un test sur des bovins dont 2 % sont porteurs d'une maladie.
• Si un animal est malade, le test est positif dans 85 % des cas.
• Si un animal est sain, le test est négatif dans 95 % des cas.
M : « le bovin est malade ».
T : « le test est positif ».
Un animal est choisi au hasard.
Calculer $P(T)$ et $P_T(M)$. Vidéo

III. Indépendance

Définition : indépendance de deux événements

On dit que deux événements A et B sont **indépendants** lorsque : $P(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) = P(\mathrm{A}) \times P(\mathrm{B})$

Lorsque deux événements A et B (de probabilités non nulles) sont **indépendants**, la réalisation (ou non) de l'un n'a pas d'influence sur la probabilité de réalisation de l'autre.
On a alors : $P_{\mathrm{B}}(\mathrm{A}) = P(\mathrm{A})$ et $P_{\mathrm{A}}(\mathrm{B}) = P(\mathrm{B})$.

Propriété

Si A et B sont deux évènements indépendants alors $\overline{\mathrm{A}}$ et B le sont également.

Exemple :
On tire une carte dans un jeu de 32 cartes.
R : « on tire un roi ». T : « on tire un trèfle ».
Les événements R et T sont-ils indépendants ?
Même question si on ajoute deux jokers dans le jeu. Vidéo

IV. Succession de deux épreuves indépendantes

Dans le cas où une expérience est constituée de deux épreuves indépendantes, on peut déterminer la probabilité des différentes issues à l'aide d'un arbre ou d'un tableau.
Comme les deux épreuves sont indépendantes, sur l'arbre pondéré, les branches du second niveau ne dépendent pas du résultat des branches du premier niveau.

Exemple :
On tire au hasard et avec remise une boule de l'urne deux fois de suite. Dans celle-ci, il y a 3 boules noires et 2 boules rouges.
Déterminer la probabilité d'obtenir :
a. 2 boules noires.
b. 1 boule noire et une boule rouge. Vidéo