Chapitre 7

Produit scalaire dans le plan

Les savoir-faire

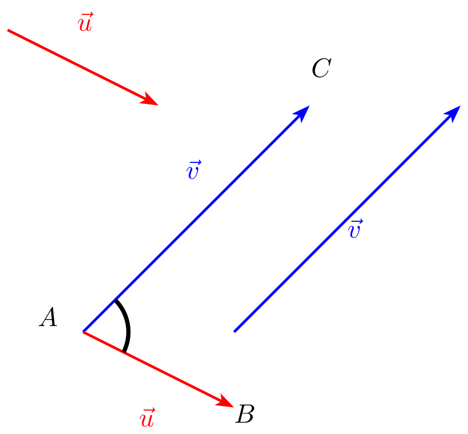
310. Calculer un produit scalaire à l'aide de normes et d'un angle.
311. Calculer le produit scalaire de deux vecteurs avec une projection orthogonale.
312. Calculer un produit scalaire dans un repère.
313. Calculer le produit scalaire de deux vecteurs avec des normes.
314. Utiliser le produit scalaire pour démontrer une orthogonalité, pour calculer une longueur ou un angle.
315. Choisir une méthode adaptée pour le calcul d'un produit scalaire en vue de la résolution d'un problème.

I. Produit scalaire dans le plan

1. Définition avec normes et angle

Définition : produit scalaire

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls du plan. Il existe trois points A, B et C tels que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$.
On appelle **produit scalaire** des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ le nombre réel noté $\vec{u}\cdot\vec{v}$ défini par : $\vec{u}\cdot\vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\widehat{BAC})$.
Autrement dit, $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos(\widehat{BAC})$.



Remarques :
Si $\vec{u} = \vec{0}$ ou $\vec{v} = \vec{0}$ alors $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.

On appelle **carré scalaire** du vecteur $\overrightarrow{AB}$ la quantité $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB}$ et on la note $\overrightarrow{AB}^2$.
Ainsi : $\overrightarrow{AB}^2 = \|\overrightarrow{AB}\|^2 = AB^2$.

2. Cas de vecteurs colinéaires

Propriété : produit scalaire et vecteurs colinéaires

- Si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires et de même sens, alors $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AC$.
- Si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires et de sens contraire, alors $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = -AB \times AC$.

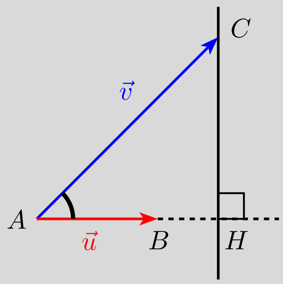
Exemple :
Soit un triangle équilatéral ABC de côté 5.
Calculer $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$. Vidéo

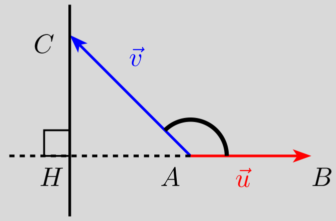
3. Définition avec la projection orthogonale

Propriété : produit scalaire et projection orthogonale

Soit trois points A, B et C avec A et B distincts.
Soit H le projeté orthogonal de C sur la droite (AB). Alors :

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AH}$$





Exemple :
$ABCD$ est un carré. Calculer le produit scalaire : $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$. Vidéo

4. Symétrie et bilinéarité

Propriétés : symétrie et bilinéarité du produit scalaire

Soit $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs du plan et k un réel.

- `Symétrie` : $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$
- `Bilinéarité` : $(k\vec{u}) \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot (k\vec{v}) = k \times (\vec{u} \cdot \vec{v})$

et

$$\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$$

II. Propriété du produit scalaire

1. Expression en base orthonormé

Propriété : expression du produit scalaire dans une base orthonormée

Dans une base orthonormée $(\vec{\imath}\,,\vec{\jmath}\,)$, on considère $\vec{u}(x\ ;\ y)$ et $\vec{v}(x'\ ;\ y')$ deux vecteurs.

Alors :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy'$$

Exemple :
On donne deux vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}-3\\4\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}-1\\5\end{pmatrix}$.

Calculer $\vec{u} \cdot \vec{v}$. Vidéo

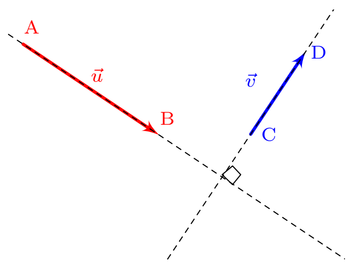
2. Norme d'un vecteur

Propriété : expression de la norme en base orthonormée

Dans une base orthonormée $(\vec{\imath}\,,\vec{\jmath}\,)$, on considère le vecteur $\vec{u}(x\ ;\ y)$.
Alors la **norme** du vecteur $\vec{u}$, notée $\|\vec{u}\|$, est donnée par :

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

3. Vecteurs orthogonaux



Le vecteur nul $\vec{0}$ est orthogonal à tout vecteur du plan.

Définition : vecteurs orthogonaux

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls du plan et A, B, C et D quatre points tels que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{CD}$. Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont dits orthogonaux lorsque les droites (AB) et (CD) sont perpendiculaires. On note $\vec{u} \perp \vec{v}$.

Propriété : nullité du produit scalaire

Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux si et seulement si :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$$

4. Critère d'orthogonalité

Propriété : critère d'orthogonalité

Dans une base orthonormé, on considère deux vecteurs $\vec{u}(x\ ;\ y)$ et $\vec{v}(x'\ ;\ y')$:
Alors, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux si et seulement si :

$$xx' + yy' = 0$$

Exemple :
On donne les points $A(2\ ;\ 1)$, $B(5\ ;\ 3)$, $C(1\ ;\ 4)$ et $D(5\ ;\ -2)$.
Démontrer que (AB) et (CD) sont perpendiculaires. Vidéo

III. Applications du produit scalaire

1. Expression du produit scalaire à l'aide de normes

Propriété : calcul de $\|\vec{u}+\vec{v}\|^2$

Pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$:

$$\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v}$$

Propriété : expression du produit scalaire à l'aide de normes

Pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$:

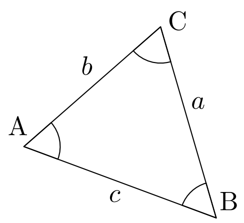
$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2}\left(\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2\right)$$

2. Formule d'Al-Kashi

Propriété : Formule d'Al-Kashi

Soit ABC un triangle. On note :
$a = BC$, $b = AC$, $c = AB$. Alors :

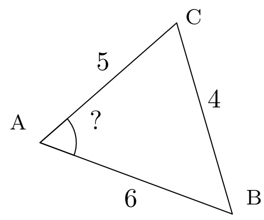
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\widehat{A}$$



Remarques :
- On a de même : $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\widehat{B}$ et $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\widehat{C}$.
- Lorsque $\widehat{A} = 90^\circ$, la relation s'écrit : $a^2 = b^2 + c^2$.

Exemple :

Calculer la mesure de l'angle $\widehat{BAC}$.
Vidéo :



3. Ensemble de points

Propriété : ensemble de points et produit scalaire

A et B sont deux points distincts donnés.
L'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$ est le cercle de diamètre $[AB]$.