Chapitre 1

Le second degré

Les savoir-faire

110. Etudier le signe d'une fonction polynôme du second degré donnée sous forme factorisée.
111. Déterminer les fonctions polynômes du second degré s'annulant en deux nombres réels distincts.
112. Donner la forme canonique d'une fonction polynôme du second degré.
113. Résoudre une équation du second degré.
114. Etudier les variations d'une fonction trinôme.
115. Factoriser, lorsque cela est possible, une fonction trinôme.
116. Étudier le signe d'une fonction trinôme ou résoudre une inéquation du second degré.
117. Choisir la forme la plus adaptée pour résoudre un problème.

I. Fonctions polynômes de degré 2

Définition : fonction polynôme du second degré

On dit qu'une fonction f, définie sur $\mathbb{R}$ est une fonction polynôme du second degré s'il existe trois nombres réels a ($a \neq 0$), b et c tels que pour tout nombre réel x :

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

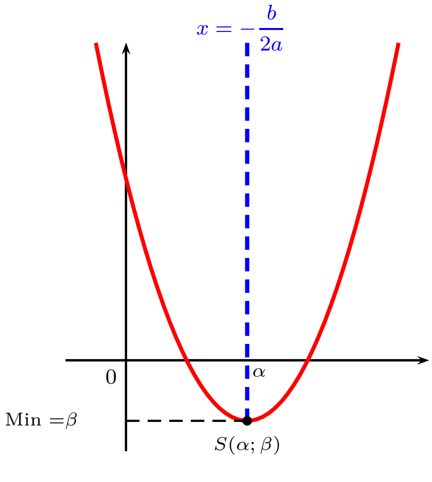
Il s'agit de la **forme développée** de $f(x)$.

Théorème

Une fonction du second degré est représentée par une parabole $\mathscr{P}$ dont le sommet S a pour abscisse $\alpha = -\dfrac{b}{2a}$ et pour ordonnée $\beta = f\left(-\dfrac{b}{2a}\right)$.
Dans un repère orthogonal, la parabole a un axe de symétrie.
Les variations sur $\mathbb{R}$ d'une fonction polynôme du second degré sont de deux types suivant le signe de a.

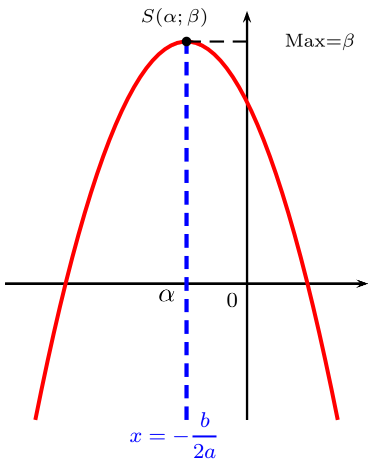
$\boldsymbol{a > 0}$

$\mathscr{P}$ est « orientée vers le haut »



$\boldsymbol{a < 0}$

$\mathscr{P}$ est « orientée vers le bas »



Exemple 1 :
Vidéo Déterminer l'extremum et la valeur où il est atteint de la fonction f définie par : $f(x) = -x^2 + 4x$.

II. Forme canonique

Définition : forme canonique

Pour tout trinôme $ax^2 + bx + c$ avec $a \neq 0$, on peut trouver deux réels α et β tels que, pour tout réel x,

$$ax^2 + bx + c = a(x - \alpha)^2 + \beta$$

avec $\alpha = -\dfrac{b}{2a}$ et $\beta = f\left(-\dfrac{b}{2a}\right)$.

L'écriture $a(x - \alpha)^2 + \beta$ est appelée **forme canonique** du trinôme.

Remarque :
La forme canonique est intéressante car elle donne les coordonnées du sommet de la parabole.

Exemple 2 :
Vidéo Déterminer la forme canonique de la fonction f définie par : $f(x) = 2x^2 - 20x + 10$.

III. Résolution d'une équation du second degré

Définition : discriminant

Le réel $b^2 - 4ac$ est appelé **discriminant** du trinôme. On note $\Delta = b^2 - 4ac$.

Propriétés : résolution d'une équation du second degré

- $\Delta < 0$ l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ n'a pas de solution réelle.
- $\Delta = 0$ l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ a une seule solution : $x_0 = -\dfrac{b}{2a}$
- $\Delta > 0$ l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ a deux solutions :

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \text{ et } x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

Exemple 3 :
Résoudre l'équation : $2x^2 - x - 6 = 0$. Vidéo
Résoudre l'équation : $2x^2 - 3x + \dfrac{9}{8} = 0$. Vidéo

IV. Factorisation

Factorisation d'un trinôme second degré

- Si $\Delta < 0$ le trinôme $ax^2 + bx + c$ ne se factorise pas.

- Si $\Delta = 0$, en notant x_0 l'unique racine, on a :
$ax^2 + bx + c = a\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2 = a(x - x_0)^2$
- Si $\Delta > 0$, en notant x_1 et x_2 les deux racines, on a :
$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$

Exemple 4 :
Vidéo Factoriser le trinôme :

$$f(x) = 4x^2 + 19x - 5$$

Propriété : propriété des racines

Soient x_1 et x_2 les récines d'un polynôme du second degré $ax^2 + bx + c$ avec $a \neq 0$.
On a $x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a}$ et $x_1 \times x_2 = \dfrac{c}{a}$.

V. Signe du trinôme

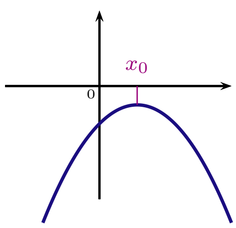
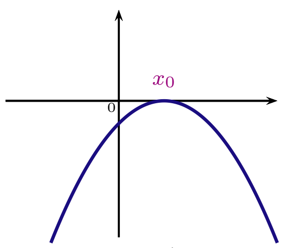
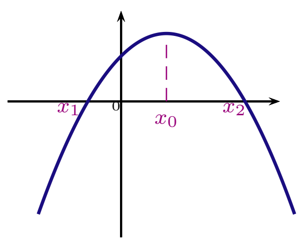
Signe d'un trinôme second degré

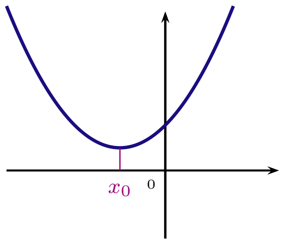
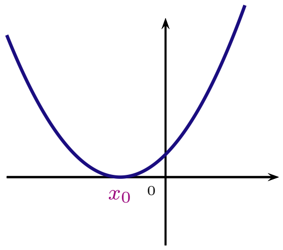
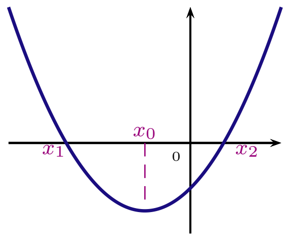
- Si $\Delta < 0$, alors le trinôme est du signe de a.
- Si $\Delta = 0$, alors le trinôme est du signe de a et s'annule en $-\dfrac{b}{2a}$.
- Si $\Delta > 0$, le trinôme s'annule en deux réels distincts x_1 et x_2. Si $x_1 < x_2$, le tableau de signes du trinôme est :

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
$f(x)$		Signe de a	0	Signe de $-a$	0	Signe de a	

A retenir
Un trinôme $ax^2 + bx + c$ est du signe de a sauf entre ses racines, si elles existent.

Interprétations graphiques

$a < 0$ et $\Delta < 0$	$a < 0$ et $\Delta = 0$	$a < 0$ et $\Delta > 0$
 Les images sont négatives.	 Les images sont négatives et $f(x_0) = 0$	 Les images sont négatives sauf entre x_1 et x_2.

$a > 0$ et $\Delta < 0$	$a > 0$ et $\Delta = 0$	$a > 0$ et $\Delta > 0$
 Les images sont positives.	 Les images sont positives et $f(x_0) = 0$	 Les images sont positives sauf entre x_1 et x_2.

Exemple 5 :
Etudier le signe du trinôme : $f(x) = 2x^2 + x + 4$ Vidéo
Même question avec : $f(x) = 2x^2 + 2x - 12$ Vidéo

Exemple 6 :
Résoudre, dans $\mathbb{R}$ l'inéquation : $-2x^2 + 6x + 6 < x^2 - 3$ Vidéo