ANALYSE 12

Fonction exponentielle

Les savoir-faire du chapitre

- **240.** Transformer une expression en utilisant les propriétés de la fonction exponentielle.
- **241.** Résoudre des équations ou inéquations contenant des exponentielles.
- **242.** Représenter graphiquement les fonctions $t \longmapsto \mathrm{e}^{-kt}$ et $t \longmapsto \mathrm{e}^{kt}$ $(k > 0)$
- **243.** Modéliser une situation par une croissance, une décroissance exponentielle.

Activités mentales

1 Ecrire sous forme décimale :

1) $2^{-1} = ...$ **3)** $2^{-2} = ...$

2) $4^0 = ...$ **4)** $5^6 \times 5^{-5} = ...$

2 Ecrire sous la forme a^n avec a réel et n entier relatif :

1) $3^5 \times 3^6 = ...$ **4)** $5^2 \times 2^2 = ...$

2) $\dfrac{3^2}{3^7} = ...$ **5)** $2 \times 2^8 = ...$

3) $2^{-1} \times 3^{-1} = ...$

3 On considère la suite géométrique u de premier terme 2 et de raison 3.

1) Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n.

2) Exprimer u_n en fonction de n.

4 On considère la suite géométrique v définie pour tout entier naturel n par : $v_n = 2 \times 2,7^n$.

1) Calculer v_0 et v_1.

2) Exprimer v_{n+1} en fonction de v_n.

3) Quelle est la nature de cette suite ?

5 Calculer les fonctions dérivées des fonctions f, g, h, k et t définies par :

1) $f(x) = 5 - 2x^2 + x$ $f'(x) = ...$

2) $g(x) = \dfrac{1}{x} - 3x$ $g'(x) = ...$

3) $h(x) = \dfrac{2}{3}x^3 + 5x^2 + 1$ $h'(x) = ...$

4) $k(x) = \sqrt{x} - x$ $k'(x) = ...$

5) $t(x) = \dfrac{1}{3x - 5}$ $t'(x) = ...$

S'entraîner

Savoir-faire - Méthodes

240 **Transformer une expression en utilisant les propriétés de la fonction exponentielle.**

1) Simplifier les expressions suivantes pour x réel quelconque :

a) $A = e^x \times e^{-x}$ **b)** $B = \left(e^{2x}\right)^2 \times \left(e^{-x}\right)^2$ **c)** $C = \dfrac{e^{3x} \times e^{4x}}{e^{2x-1}}$

....
....
....
....
....

2) Etablir que pour tout réel x : $\dfrac{1}{1+e^{-x}} = \dfrac{e^x}{e^x+1}$.

....
....
....

3) Simplifier les expressions suivantes pour x réel quelconque :

a) $A = (e^x)^2 - \dfrac{1}{e^{-2x}}$ **b)** $B = (e^x + e^{-x})^2 - (e^x - e^{-x})^2$ **c)** $C = \dfrac{e^{2x+1}}{e^{1-x}}$

....
....
....
....
....

241 **Résoudre des équations ou inéquations contenant des exponentielles.**

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations et inéquations suivantes :

1) $e^x = 1$ **2)** $e^{2-x} = 1$ **3)** $e^{x^2} = e$ **4)** $e^{2x} < e^2$ **5)** $e^{x^2} \geqslant e^4$ **6)** $e^{x^2+x-1} = 1$

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

242 **Représenter graphiquement les fonctions $t \longmapsto e^{-kt}$ et $t \longmapsto e^{kt}$ ($k > 0$)**

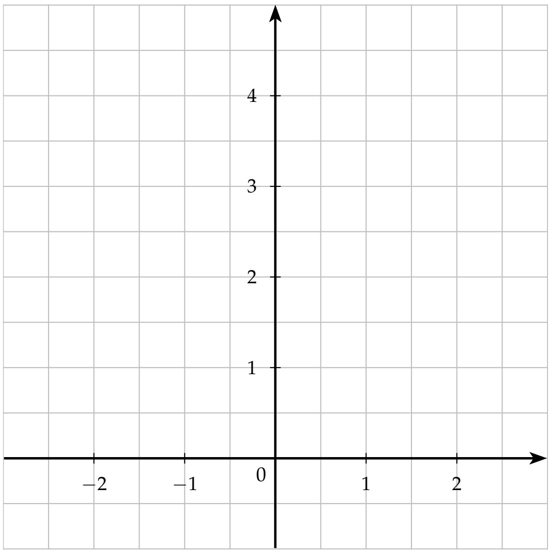
Soit f la fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ par $f(t) = e^{-0,8t}$.

1) Calculer $f'(t)$.

2) En déduire le sens de variation de f.

3) Compléter le tableau suivant et représenter graphiquement la fonction f.

t	-3	-2	-1	$-0,5$	0	$0,5$	1	2	3
$f(t)$									



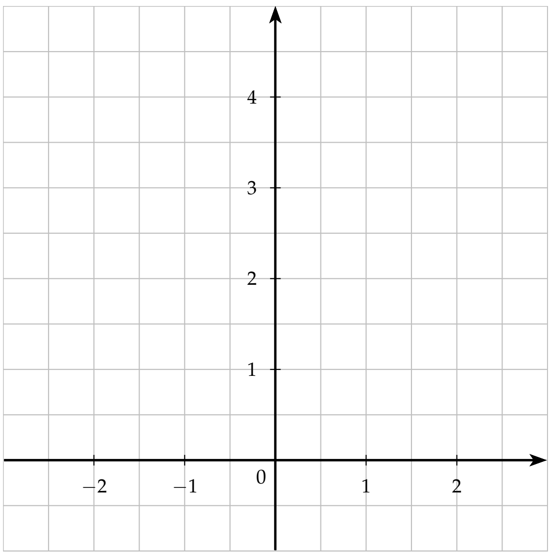
Soit g la fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ par $g(t) = e^{0,6t}$.

1) Calculer $f'(t)$.

2) En déduire le sens de variation de g.

3) Compléter le tableau suivant et représenter graphiquement la fonction g.

t	-3	-2	-1	$-0,5$	0	$0,5$	1	2	3
$g(t)$									



S'entraîner

243 **Modéliser une situation par une croissance, une décroissance exponentielle.**

On injecte à un patient une dose de 3,6 mg d'une substance médicamenteuse.
On suppose que la substance se répartit instantanément dans le sang, puis qu'elle s'élimine progressivement.
On modélise la quantité de substance médicamenteuse présente dans le sang, exprimée en mg, à l'instant t, exprimé en heure, par $Q(t)$, où Q est une fonction définie et dérivable sur $[0\,;\,+\infty[$. L'injection est réalisé à l'instant $t = 0$.
On admet que la fonction Q et sa dérivée vérifient :

Pour tout t positif, $Q'(t) = -kQ(t)$ où k est une constante liée à l'expérimentation.

1) a) Montrer que la fonction $f\ :\ t \longmapsto 3,6\mathrm{e}^{-kt}$, définie sur $[0\,;\,+\infty[$, vérifie l'égalité $f' = -kf$.

On admet dans la suite du problème que la fonction $t \longmapsto 3,6\mathrm{e}^{-kt}$ est égale à la fonction Q.

b) Interpréter $f(0)$ dans le contexte de la situation étudiée.

2) Au bout d'une heure, la quantité de substance présente dans le sang a diminué de 20 %.

a) Montrer que la constante k vérifié légalité $\mathrm{e}^{-k} = 0,8$.

b) A l'aide de la calculatrice, déterminer un encadrement de k à 10^{-3} près.