ALGEBRE

1

Fonctions polynômes du second degré

Les savoir-faire du chapitre

- **110.** Etudier le signe d'une fonction polynôme du second degré donnée sous forme factorisée.
- **111.** Déterminer les fonctions polynômes du second degré s'annulant en deux nombres réels distincts.
- **112.** Donner la forme canonique d'une fonction polynôme du second degré.
- **113.** Résoudre une équation du second degré.
- **114.** Etudier les variations d'une fonction trinôme.
- **115.** Factoriser, lorsque cela est possible, une fonction trinôme.
- **116.** Étudier le signe d'une fonction trinôme ou résoudre une inéquation du second degré.
- **117.** Choisir la forme la plus adaptée pour résoudre un problème.

Le calcul mental

1 Compléter :

1) $4^2 - 4 \times 2 \times (-1) = ...$
2) $(-2)^2 - 4 \times (-5) \times 2 = ...$
3) $3^2 - 4 \times 2 \times 5 = ...$
4) $8^2 - 4 \times 3 \times 2 = ...$
5) $(-6)^2 - 4 \times 0 \times (-5) = ...$
6) $(-2)^2 - 4 \times 1 \times 4 = ...$
7) $3^2 - 4 \times (-2) \times (-1) = ...$

2 Compléter :

1) $f(x) = x^2 + 2x + 4$ $\quad f(-1) = ...$
2) $f(x) = 2x^2 - 3x + 1$ $\quad f(2) = ...$
3) $f(x) = -2x^2 - 8$ $\quad f(1) = ...$
4) $f(x) = -3x^2 + x + 1$ $\quad f(-1) = ...$
5) $f(x) = -x^2 + 5x$ $\quad f(-2) = ...$
6) $f(x) = x^2 + 5x - 7$ $\quad f(3) = ...$

3 Développer sans écrire de calculs intermédiaires :

1) $(x+1)^2 = ...$
2) $(x-5)^2 = ...$
3) $(3x+4)(3x-4) = ...$
4) $(2x-7)^2 = ...$
5) $(1+3x)^2 = ...$

4 Donner les solutions des équations suivantes :

1) $x^2 = 4$ $\quad \mathscr{S} = ...$
2) $x^2 = 5$ $\quad \mathscr{S} = ...$
3) $x^2 - 8 = 0$ $\quad \mathscr{S} = ...$
4) $x^2 + 6 = 0$ $\quad \mathscr{S} = ...$
5) $2x^2 - 50 = 0$ $\quad \mathscr{S} = ...$
6) $1 - x^2 = 0$ $\quad \mathscr{S} = ...$
7) $(x+3)(5x-9) = 0$ $\quad \mathscr{S} = ...$

S'entraîner

110 **Etudier le signe d'une fonction polynôme du second degré donnée sous forme factorisée.**

Soit P la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $P(x) = 2(x-5)(4-2x)$.

1) Justifier que P est une fonction polynôme du second degré.

2) Etudier le signe de $P(x)$.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

111 **Déterminer les fonctions polynômes du second degré s'annulant en deux nombres réels distincts.**

1) Déterminer l'ensemble des fonctions polynômes P du second degré qui s'annulent en -2 et 6.

2) Démontrer qu'il existe un unique polynôme Q tel que $Q(-4) = Q(3) = 0$ et $Q(-1) = 1$.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

112 **Donner la forme canonique d'une fonction polynôme du second degré.**

1) Par le calcul :

La forme canonique est donnée par :

$$f(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta$$

Avec $\alpha = -\dfrac{b}{2a}$ et $\beta = f\left(-\dfrac{b}{2a}\right)$.

Déterminer les formes canoniques des fonctions suivantes :

a) $f(x) = -x^2 + 3x - 1$

b) $g(x) = 2x^2 + 5x + 4$

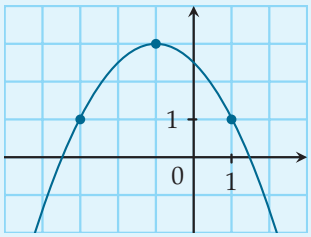
.....

.....

.....

2) Graphiquement :

On considère la parabole P donnée ci-contre.
Pour déterminer son équation :
a) on lit les coordonnées du sommet $S\,(\alpha\ ;\ \beta)$;
b) on utilise un autre point pour déterminer le coefficient a.



Obtenir la forme canonique correspondant à la parabole ci-dessus.

.....
.....
.....
.....

113 **Résoudre une équation du second degré.**

Pour résoudre l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ dans $\mathbb{R}$:
- on lit les coefficients a, b et c ;
- on calcule le discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$;
- suivant le signe du discriminant, on en déduit les solutions de l'équation si elles existent.

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

$2x^2 - 7x + 3 = 0$ $\qquad$ $-x^2 + 4x - 4 = 0$ $\qquad$ $10x^2 + 5x + 1 = 0$ $\qquad$ $12x^2 + 3 = 12x$

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

S'entraîner

114 **Déterminer les variations d'une fonction polynôme du second degré.**

Pour étudier les variations d'une fonction du second degré définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = ax^2 + bx + c$

- calculer les coefficients α et β de la forme canonique ;
- suivant le signe de a, on déduit le tableau de variations.

Dresser le tableau de variations des fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par les expressions suivantes :

$f(x) = x^2 + 2x + 3$ $\quad$ $g(x) = x^2 - 6x - 1$ $\quad$ $h(x) = -2x^2 + 4$ $\quad$ $u(x) = 2(x-1)^2 + 4$

115 **Factoriser, lorsque cela est possible, une fonction trinôme.**

Factoriser la fonction polynôme P dans chacun des cas suivants :

1) $P(x) = 2x^2 + 3x$ $\quad$ **2)** $P(x) = 2x^2 - 8$ $\quad$ **3)** $P(x) = -6x^2 - 7x + 3$

116 **Etudier le signe d'une fonction trinôme ou résoudre une inéquation du second degré.**

Pour étudier le signe de $ax^2 + bx + c > 0$ dans $\mathbb{R}$:
- on détermine les racines du trinôme s'il en a ;
- on utilise la règle d'or : un trinôme est du signe de a sauf entre ses racines (si elles existent).
- on résout l'inéquation à l'aide du tableau de signes du trinôme.

Après avoir fait les tableaux de signes des trinômes mis en jeu, résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

$$2x^2 - 7x + 3 < 0 \qquad -x^2 + 4x - 4 > 0 \qquad 10x^2 + 5x + 1 \geqslant 0$$

S'entraîner

117 **Choisir la forme la plus adaptée pour résoudre un problème.**

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 4(x+1)^2 - 1$ et $\mathscr{C}$ sa courbe représentative.

1) Montrer que pour tout réel x, $f(x) = 4x^2 + 8x + 3$ et que $f(x) = (2x+1)(2x+3)$.

.....
.....
.....
.....
.....
.....

2) En utilisant la forme de f la plus adaptée :

a) calculer $f(0)$ et $f(-1)$.

.....
.....
.....

b) déterminer les racines de f.

.....
.....
.....

c) déterminer les coordonnées des points d'intersection de la courbe $\mathscr{C}$ avec l'axe des abscisses.

.....
.....
.....

d) montrer que, pour tout réel x, $f(x) \geqslant -1$.

.....
.....
.....
.....