Lycée Louise Michel 2022/2023
Première

MATHEMATIQUES
Devoir surveillé n°1

Exercice 1

1. En utilisant la représentation graphique, on obtient les valeurs de α et β et ainsi la forme canonique :

$$f(x) = a(x-1)^2 - 8$$

En utilisant l'égalité $f(0) = -6$, on obtient $a - 8 = -6$ soit $a = 2$.
On a donc $f(x) = 2(x-1)^2 - 8 = 2x^2 - 4x - 6$.
Il s'agit de la troisième proposition.

2. La forme canonique est : $(x-3)^2 - 14$.

3. Le maximum de la fonction f est donné par l'image de $-\dfrac{b}{2 \times a} = -\dfrac{-4}{2 \times (-1)} = -2$.
$f(-2) = -(-2)^2 - 4 \times (-2) + 1 = 5$. Le maximum est 5.

4. L'équation a une unique solution si et seulement si $\Delta = 0$.
$\Delta = 4a^2 - 36$.
L'équation $4a^2 - 36 = 0$ a deux solutions -3 et 3.
L'équation $x^2 + 2ax + 9 = 0$ admet une unique solution lorsque $a = -3$ ou $a = 3$.

5. On résout l'équation dans $\mathbb{R}^*$:

$$\begin{aligned} \frac{x}{5} - \frac{3}{x} &= 2 && (1)\\ \frac{x^2-15}{5x} &= 2 && (2)\\ x^2 - 15 &= 10x && (3)\\ x^2 - 10x - 15 &= 0 && (4) \end{aligned}$$

Il s'agit d'une équation du second degré qui a deux solutions : $5 + 2\sqrt{10}$ et $5 - 2\sqrt{10}$.

Exercice 2

1. Le bénéfice est donné par la différence entre la recette et les coûts.
Puisque chaque tonne de désinfectant est vendue 3000 euros, la recette en centaines d'euros $R(q)$ pour la vente de q tonnes de désinfectant est : $R(q) = 30q$.

Le bénéfice $B(q)$ correspondant est :

$$B(q) = R(q) - C(q) = 30q - (2q^2 - 70q + 1200) = 30q - 2q^2 + 70q - 1200 = -2q^2 + 100q - 1200$$

2. • Pour déterminer la forme canonique, on calcule α et β.
$\alpha = -\dfrac{100}{2 \times (-2)} = 25$ et $\beta = f(\alpha) = B(25) = -2 \times 25^2 + 100 \times 25 - 1200 = 50$.
Ainsi, la forme canonique est donnée par :

$$B(x) = a(q-\alpha)^2 + \beta = -2(q-25)^2 + 50$$

• Pour déterminer la forme factorisée, on calcule Δ :

$$\Delta = 100^2 - 4 \times (-2) \times (-1200) = 400 > 0$$

Les racines du trinôme sont : $q_1 = \dfrac{-100+20}{2 \times (-2)} = 20$ et $x_2 = \dfrac{-100-20}{2 \times (-2)} = 30$.
On en déduit la forme factorisée :

$$B(q) = a(q-q_1)(q-q_2) = -2(q-20)(q-30)$$

Autrement
Une autre méthode consiste à développer les expressions proposées pour obtenir la forme développée de $B(q)$.

3. **a.** Pour obtenir les « points morts », on doit résoudre l'équation $B(q) = 0$.
Il y a donc deux « points morts », pour 20 tonnes et 30 tonnes de détergent produits et vendus.

b. On obtient le bénéfice maximal et la production correspondante grâce à la forme canonique.

q	0	25	50
$B(q)$	-1200 ↗	50	↘ -1200

Le bénéfice maximal est 5 000 euros pour une production de 25 tonnes.

Exercice 3

- Partie A -

1. 10 est l'abscisse du sommet de la parabole (la fonction f est une fonction polynôme du second degré). Cette abscisse se calcule à l'aide de la formule $-\dfrac{b}{2a}$, soit $-\dfrac{-40}{2 \times 2} = 10$.

2. **a.** La forme canonique de $f(x)$ est $a(x-\alpha)^2 + \beta$ avec $a = 2$, $\alpha = 10$ et $\beta = 200$.

Ainsi la forme canonique de $f(x)$ est donnée par :

$$f(x) = 2(x-10)^2 + 200$$

b. Le minimum de f est 200. cela signifie que le polynôme $f(x)$ n'a pas de racines. Ainsi, $\Delta < 0$.

- **Affirmation 1 :** la fonction f est strictement croissante sur $[10\ ;\ 20]$, donc si $x > 13$, alors $f(x) > f(13)$ soit $f(x) > 218$.
L' affirmation 1 est vraie.

- **Affirmation 2 :** En prenant $x = 0$, on a $f(0) = 400 > 218$ et pourtant 0 n'est pas supérieur à 13.

Contre-exemple

Pour montrer qu'une affirmation est fausse, on trouve un nombre x qui vérifie l'hypothèse $f(x) > 218$ mais qui ne vérifie pas la conclusion : 0 vérifie bien l'hypothèse $f(0) > 218$ mais pas la conclusion car $0 < 13$.

L' affirmation 2 est fausse.

- Partie B -

1. Si l'un des deux morceaux pèse 13 grammes, l'autre pèse 7 grammes $(20 - 13 = 7)$.
La valeur de ces deux morceaux est donc donnée par :

$$13^2 + 7^2 = 218$$

La valeur totale est bien de 218 €.

2. Si x est la masse d'un des morceaux, l'autre a une masse de $(20 - x)$.
La valeur totale est donnée par $x^2 + (20-x)^2$.

On développe :

$$\begin{aligned} x^2 + \underbrace{(20-x)^2}_{(a-b)^2} &= x^2 + \underbrace{400}_{a^2=20^2} - \underbrace{40x}_{2ab=2\times x\times 20} + \underbrace{x^2}_{b^2=x^2} \\ &= 2x^2 - 40x + 400 \\ &= f(x) \end{aligned}$$

3. a. Si la pierre se brise en deux morceaux de même masse (c'est-à-dire en deux morceaux de 10 g chacun), on obtient une valeur totale de 200 € d'après le tableau de variations (car $f(10) = 200$).
Cette valeur est la valeur minimale de la fonction f. On peut donc dire que du point de vue du propriétaire, la pire des situations est que la pierre se brise en deux morceaux de même masse.
L'affirmation est donc vraie.

b. Le maximum de la fonction f est 400. Ainsi si la pierre se brise en deux morceaux, sa valeur ne dépassera jamais 400 € ce qui est sa valeur si elle ne se brise pas ($20^2 = 400$).
L'affirmation est donc fausse.

Pensez-y !
La valeur totale des deux morceaux est donnée par la fonction f.