MATHEMATIQUES
Dérivation (1) : sujet d'entraînement 2

Exercice 1

On donne sur la figure ci-dessous la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ de la fonction f en y indiquant les droites tangentes aux points A et C.

1. Donner l'interprétation graphique du nombre dérivé $f'(a)$.

2. Lectures graphiques.

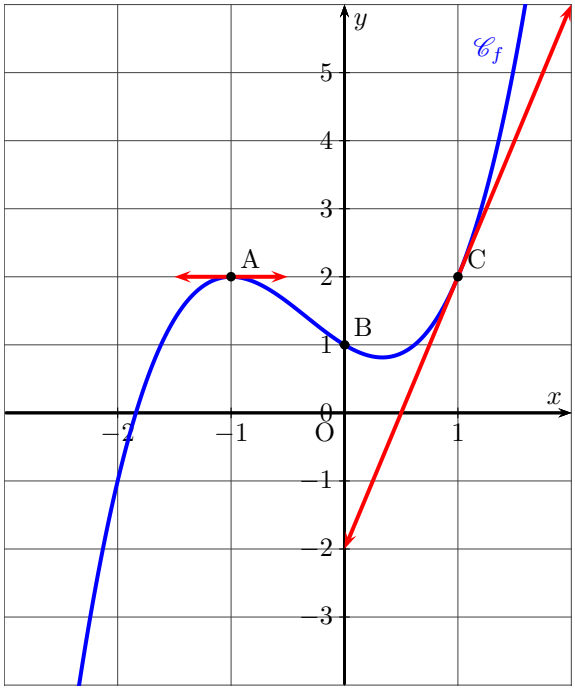
a. Déterminer les nombres suivants :

$$f(-1), f(0), f(1), f'(-1) \text{ et } f'(1)$$

b. Déterminer une équation de la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point C.

c. Donner le nombre de solution de l'équation $f'(x) = 0$.

d. La tangente T à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 0 a pour équation $y = -x + 1$. Tracer cette droite sur le graphique.



3. Avec l'expression algébrique.
La fonction f représentée ci-contre est définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x^3 + x^2 - x + 1$$

a. Montrer que la courbe $\mathscr{C}_f$ passe par le point $D(-2\,;\,-1)$.

b. Calculer $f'(x)$ pour tout réel x.

c. Quel est le coefficient directeur de la tangente T_D au point D ?

d. Tracer la droite T_D sur le graphique.

Exercice 2

Soit g la fonction définie sur $I =]0\ ;\ +\infty[$ par : $g(x) = \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{1}{x}$.
On note $\mathscr{C}_g$ sa courbe représentative dans un repère.

1. Calculer $g'(x)$ pour tout réel x de I (on écrira cette fonction dérivée sous la forme d'un seul quotient).

2. Justifier que la tangente au point d'abscisse 2 de $\mathscr{C}_g$ est parallèle à la droite d'équation $y = 3,75x - 8$.

3. Résoudre l'équation $g'(x) = 0$ dans $]0\ ;\ +\infty[$. Quelle interprétation graphique peut-on en faire ?

Exercice 3

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = -\dfrac{2}{x}$.

On note $\mathscr{H}$ la représentation graphique de f dans un repère du plan.
Soit N un point d'abscisse n non nul appartenant à $\mathscr{H}$.
On note T_n la tangente à $\mathscr{H}$ au point d'abscisse n.

1. Montrer que T_n a pour équation : $y = \dfrac{2}{n^2}(x - 2n)$.

2. Démontrer que les droites T_{-1} et T_1 sont parallèles.

3. Soit A le point du plan de coordonnées $(-4\ ;\ -4)$. Le point A appartient-il à $\mathscr{H}$?

4. Dans cette question, on cherche à déterminer les points N de $\mathscr{H}$ en lesquels la tangente à $\mathscr{H}$ passe par A.

a. Montrer que $A \in T \iff -4n^2 + 4n + 8 = 0$.

b. En déduire les valeurs de n pour lesquels T_n passe par A.

Exercice 4

Les deux questions suivantes sont indépendantes.

1. a. Soit $h > 0$ et $a > 0$.

Montrer que $\dfrac{\dfrac{1}{a+h} - \dfrac{1}{a}}{h} = \dfrac{-1}{a(a+h)}$.

b. En déduire que la fonction inverse est dérivable sur $]0\ ;\ +\infty[$ et donner sa fonction dérivée pour tous réels $x \in]0\ ;\ +\infty[$.

2. Soit $g\ :\ x \longmapsto 4x^2\sqrt{x}$.

a. Expliquer pourquoi la fonction g est dérivable sur $]0\ ;\ +\infty[$, puis montrer que, pour tout réel strictement positif x,

$$g'(x) = 10x\sqrt{x}$$

b. La fonction g est-elle dérivable en 0 ? Si oui, déterminer la valeur de $g'(0)$. Si non, expliquer pourquoi.